



TUGAS AKHIR - SM141501

ANALISIS DAN SIMULASI MODEL PADA SISTEM SATU FITOPLANKTON DUA ZOOPLANKTON YANG DIPENGARUHI OLEH RACUN

DYNA TSUROYYA
NRP 1211 100 064

Dosen Pembimbing
Dr. Dra. Mardlijah, MT
Tahiyatul Asfihani, S. Si, M. Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015



FINAL PROJECT - SM141501

ANALYSIS AND SIMULATION MODEL OF ONE PHYTOPLANKTON TWO ZOOPLANKTON SYSTEM IN THE PRESENCE OF TOXICITY

DYNA TSUROYYA
NRP 1211 100 064

Supervisors
Dr. Dra. Mardlijah, MT
Tahiyatul Asfihani, S. Si, M. Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

LEMBAR PENGESAHAN

**ANALISIS DAN SIMULASI MODEL PADA SISTEM
SATU FITOPLANKTON DUA ZOOPLANKTON YANG
DIPENGARUHI OLEH RACUN**

***ANALYSIS AND SIMULATION MODEL OF ONE
PHYTOPLANKTON TWO ZOOPLANKTON SYSTEM IN
THE PRESENCE OF TOXICITY***

TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains Pada
Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

DYNA TSUROYYA
NRP. 1211 100 064


Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,



Tahiyatul Asfihani, S.Si, M. Si
NIP. 19870728 201404 2 001

Dosen Pembimbing I,



Dr. Dra. Mardijah, MT
NIP. 19670114 199102 2 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITS



Prof. Dr. Egra Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001
Surabaya, Juli 2015

ANALISIS DAN SIMULASI MODEL PADA SISTEM SATU FITOPLANKTON DUA ZOOPLANKTON YANG DIPENGARUHI OLEH RACUN

Nama : DYNA TSUROYYA
NRP : 1211 100 064
Jurusan : Matematika
Dosen : 1. Dr. Dra. Mardlijah, MT
Pembimbing : 2. Tahiyatul Asfihani, S. Si, M. Si

Abstrak

Plankton adalah organisme mikroskopis laut yang terdiri dari tumbuhan (Phytoplankton), hewan (Zooplankton) dan bakteri (Bacterioplankton) yang sangat halus, bergerak bebas di dalam air, dan merupakan makanan utama ikan yang masing-masing bertindak sebagai produsen, konsumen, dan pengurai. Dalam penelitian ini, penulis menganalisa model dari pengaruh racun pada sistem dinamik yang diberikan yaitu Fungsi Respon Holling Type II pada *Predator-Prey System*, dengan dua zooplankton sebagai predator dan satu fitoplankton sebagai prey, dimana titik setimbang dan kestabilan pada sistem diperoleh. Dengan menggunakan Fungsi Lyapunov didapatkan stabil asimtotis global pada sistem. Terdapat empat titik setimbang yang masing-masing titik stabil asimtotis global. Berdasarkan hasil simulasi menunjukkan bahwa pengaruh racun pada sistem berpengaruh juga pada pemanenan. Jika terdapat pemanenan dan koefisien racun pada *predator* (zooplankton I dan II) tidak melebihi koefisien racun pada *prey* (fitoplankton), maka pertumbuhan populasi stabil (terjaga kelestariannya).

Kata Kunci: Plankton, Racun, Sistem Dinamik, Titik Keseimbangan, Kestabilan Lyapunov

**ANALYSIS AND SIMULATION MODEL OF ONE
PHYTOPLANKTON TWO ZOOPLANKTON SYSTEM
IN THE PRESENCE OF TOXICITY**

Name : DYNA TSUROYYA
NRP : 1211 100 064
Department : Mathematics
Supervisors : 1. Dr. Dra. Mardlijah, MT
2. Tahiyatul Asfihani, S. Si, M. Si

Abstract

Plankton is an ocean microscopic organism that divided in plant (phytoplankton), animal (zooplankton), and bacteria (bacterioplankton) which small organism, can swim slowly with haphazard movements in the water column and they provide the primary food source for fish which act as producers, consumers, and recyclers respectively. In this project, the writer proposed to analyze the model of Dynamic Systems in Predator-Prey System that One Phytoplankton as prey and Two Zooplankton as predator in the Presence of Toxicity with Holling Type II functional response where the equilibrium points and its stability can obtain. The system is globally asymptotic stability had proven by Lyapunov Function. There are four equilibrium points and their stability are globally asymptotic respectively. Based on the simulation show that in the presence of toxicity on the system depends on harvesting. If harvesting exist and the coefficient of toxin of prey (phytoplankton) is no more than the coefficient of toxin of predator (zooplankton I and II), so the growth of these population is stable (survive).

Keywords: *Plankton, Toxic, Dynamic Systems, Equilibrium Points, Stability of Lyapunov*

KATA PENGANTAR

Assalaamu'alaikum Warahmatullaahi Wabarakaatuh

Alhamdulillahiraabbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allaah Subhaanahu Wa Ta'ala yang telah memberikan limpahan rahmat, petunjuk serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul:

ANALISIS DAN SIMULASI MODEL PADA SISTEM SATU FITOPLANKTON DUA ZOOPLANKTON YANG DIPENGARUHI OLEH RACUN

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika ITS sekaligus dosen pembimbing yang telah memberikan dukungan dan bimbingan selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, MT dan ibu Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Bapak Drs. M. Setijo Winarko, M.Si, bapak Dr. Budi Setiyono, S. Si, MT, dan Ibu Dian Winda Setyawati,

S.Si, M.Si selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tugas Akhir ini.

4. Bapak Chairul Imron, MI.Komp. Kaprodi Sarjana Matematika FMIPA ITS dan Mas Ali.
5. Ibu Dra. Wahyu Fistia Doctorina, M.Si selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Keberhasilan penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Allaah Subhaanahu Wa Ta'ala yang telah memberi kasih sayang, petunjuk, kekuatan, dan kesabaran dalam setiap langkah kehidupan penulis serta kepada Nabi Muhammad Shallallaahu 'alaihi Wasallam yang telah membimbing ummatNya, dari zaman jahiliyyah menuju zaman yang penuh ilmu ini.
2. Ummi dan Abi, kedua orangtua penulis, terima kasih atas segala do'a, restu, kasih sayang, pendidikan dan pengajaran yang selalu dicurahkan kepada penulis. Saudara-saudara kesayangan di Bani Choiruddin, baik saudara kandung, ipar, maupun para keponakan, terima kasih atas do'a, restu, dan dukungannya kepada penulis dalam kesuksesan pengerjaan Tugas Akhir ini.
3. Sissy Ananda Yogi Nugraheni dan Nur Rizqiyyah Rohmah, terima kasih sudah menjadi teman curhat penulis selama ini, terima kasih atas bantuan, do'a

dan dukungannya kepada penulis untuk menyelesaikan segera Tugas Akhir ini. Semoga menjadi shahabat dunia akhirat. Aamiin.

4. Mbak Lyana dan mbak Ria, dan Jama'ah UQ, terima kasih atas do'a dan dukungannya selama ini kepada penulis untuk tetap terus melaju menggapai ridhaNya agar selalu haus akan ilmuNya. Semoga ukhuwwah kita semakin terjaga. Aamiin.
5. Teman-teman kesayangan, Oing, Ika, Patrick, Dini, Tete, Vimala, Jun, Virama, Musa, Agus, terima kasih atas do'a dan dukungan serta bantuan agar Tugas Akhir ini selesai dengan segera dan baik. Semoga tali silaturahmi kita tidak terputus sampai di sini. Aamiin.
6. Teman-teman seperjuangan Ibnu Muqlah, Singgih, Andika, Aat, Ebi, Mpip, Ulva, dll, terima kasih sudah mau berbagi ilmu dunia dan akhirat. In syaa Allaah bermanfa'at. See ya on TOP, guys! Aamiin.
7. Pak Komting Matematika ITS 2011, Hasanuddin Al Habib, dan teman-teman Matematika ITS 2011 yang telah banyak membantu penulis sejak zaman maba sampai udah mau lulus ini.
8. Teman-teman seperjuangan Tugas Akhir yang in syaa Allaah wisuda ke-112, mostly, yang penulis tidak bisa sebutkan satu-persatu.

Tentu masih banyak pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih telah membantu sampai terselesaikannya Tugas Akhir ini. Semoga Allaah Subhaanahu Wa Ta'ala membalas kebaikan dengan balasan yang lebih baik. Aamiin yaa Rabbal 'alamiin. Jazaakumullaahu khairaan.

Penulis juga menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, 26 Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xix
DAFTAR TABEL	xxi
DAFTAR SIMBOL	xxiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 LatarBelakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	4
1.6 Sistematika Penulisan	
	7
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Pertumbuhan Populasi <i>Prey Predator</i>	
2.2 Model <i>Prey Predator</i> Sistem <i>Holling Type</i> <i>II</i>	10
2.3 Sistem Dinamik pada Sistem Satu Fitoplankton Dua Zooplankton yang Dipengaruhi oleh Racun.....	11 14
2.4 Titik Keseimbangan	15
2.5 Kestabilan Sistem.....	15
2.5.1 Kestabilan Lokal	16
2.5.2 Kestabilan Global.....	

BAB III	METODOLOGI PENELITIAN	17
3.1	Studi Literatur.....	17
3.2	Mengkaji Model Sistem Dinamik.....	17
3.3	Mencari Titik Keseimbangan dan Menganalisis Kestabilan dari setiap Titik Setimbang.....	18
3.4	Mengkaji dan Menganalisis Pengaruh Racun pada Pertumbuhan Satu Fitoplankton Dua Zooplankton.....	19
3.5	Simulasi Model dengan Menggunakan <i>Software</i> MATLAB.....	19
3.6	Interpretasi Hasil Analisis dan Simulasi pada Model serta Menyusun Laporan Tugas Akhir	19
 BAB IV	 ANALISIS DAN PEMBAHASAN	 21
4.1	Model Sistem Dinamik pada Sistem Satu Fitoplankton Dua Zooplankton yang Dipengaruhi oleh Racun.....	21
4.2	Model Sistem Dinamik dengan Pemanenan.....	22
4.3	Daerah Penyelesaian Model	23
4.4	Titik Setimbang	26
4.5	Penyelesaian Kestabilan Lokal dan Global.....	34
4.5.1	Pada Titik Setimbang $P_0(0,0,0)$	36
4.5.2	Pada Titik Setimbang $P'(x',0,0)$	37
4.5.3	Pada Titik Setimbang $P_1(x_1, y_1, 0)$..	39
4.5.4	Pada Titik Setimbang $P_2(x_2, 0, z_2)$	41
4.5.5	Pada Titik Setimbang $P^*(x^*, y^*, z^*)$..	43
4.6	Simulasi.....	47
4.7	Analisis Hasil Simulasi	48

BAB V PENUTUP	53
5.1 Kesimpulan	53
5.2 Saran	54
 DAFTAR PUSTAKA.....	 55
LAMPIRAN.....	57
BIODATA PENULIS.....	83

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Parameter dan Nilai.....	47
-----------	--------------------------	----

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Fitoplankton Jenis <i>Cyanophyta</i>	12
Gambar 2.2 Fitoplankton Jenis <i>Xanthophyta</i>	13
Gambar 2.3 Berbagai Jenis Zooplankton.....	13
Gambar 2.4 Plankton (Fitoplankton, Zooplankton, <i>Bacterioplankton</i>).....	14
Gambar 4.1 Simulasi Sistem Dinamik dengan Nilai $u = v = \omega = 0.3$	48
Gambar 4.2 Simulasi Sistem Dinamik Tanpa Panen dengan Nilai $u = 0.4$, $v = \omega = 0.3$ dan $E = 0$	49
Gambar 4.3 Simulasi Sistem Dinamik dengan Panen dengan Nilai $u = 0.4$ dan $v = \omega = 0.3$	50
Gambar 4.4 Simulasi Sistem Dinamik dengan Nilai $u = v =$ $\omega = 0$	51
Gambar 4.5 Simulasi Sistem Dinamik dengan Nilai $u = 0.057$, $v = 0.02$, $\omega = 0.025$	52

DAFTAR SIMBOL

x	=	Jumlah populasi <i>prey</i> (fitoplankton)
y	=	Jumlah populasi <i>predator</i> (zooplankton I)
z	=	Jumlah populasi <i>predator</i> (zooplankton II)
t	=	Waktu
\dot{x}	=	Turunan x terhadap t
\dot{y}	=	Turunan y terhadap t
\dot{z}	=	Turunan z terhadap t
λ	=	Nilai eigen
$>$	=	Lebih besar dari
$<$	=	Lebih kecil dari
\geq	=	Lebih besar sama dengan
\leq	=	Lebih kecil sama dengan

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini, dijelaskan hal-hal yang melatarbelakangi munculnya permasalahan yang dibahas dalam laporan Tugas Akhir ini, yaitu tentang bagaimana analisis kestabilan lokal dan global pada sistem satu fitoplankton dua zooplankton yang dipengaruhi oleh racun. Kemudian dibentuk rumusan masalah dari latar belakang tersebut. Selanjutnya dijabarkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian Tugas Akhir ini. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Dalam biota laut, plankton adalah organisme mikroskopis laut yang terdiri dari jenis tumbuhan (Phytoplankton), jenis hewan (Zooplankton) dan bakteri (Bacterioplankton) yang sangat halus, bergerak bebas di dalam air, dan merupakan makanan utama ikan. Karena plankton mudah terbawa arus, maka dengan gaya bebas dia dapat berenang secara perlahan sebab daya renang plankton rendah. Plankton terdapat dalam semua jenis perairan, diantaranya samudera, laut, sungai, kolam, danau, dan lain sebagainya, di mana mereka menyediakan sumber makanan utama untuk ikan dan organisme lainnya yang ada di perairan tersebut. Plankton dibagi menjadi tiga jenis: Fitoplankton, Zooplankton, dan Bacterioplankton yang masing-masing bertindak sebagai produsen, konsumen, dan pengurai. Fitoplankton adalah jenis tumbuhan yang hidup di dekat permukaan air terdapat cahaya yang cukup untuk mendukung fotosintesis, seperti *Cyanophyta* dan *Xanthophyta*. Zooplankton merupakan jenis hewan yang memakan plankton lain, serta telur atau larva hewan yang lebih besar. Sedangkan, Bacterioplankton

adalah bakteri yang berfungsi sebagai pengurai. Semua biota laut yang mati, akan diuraikan oleh bakteri sehingga akan menghasilkan hara seperti fosfat, nitrat, silikat, dan sebagainya. Hara ini kemudian akan didaur-ulangkan dan dimanfaatkan lagi oleh fitoplankton dalam proses fotosintesis.

Persebaran plankton bervariasi, baik secara horizontal, vertikal, maupun musiman. Hal ini terutama disebabkan oleh ketersediaan cahaya. Selain faktor cahaya, terdapat faktor lain yaitu ketersediaan hara (nutrisi). Plankton merupakan organisme yang paling banyak di permukaan air, terutama fitoplankton. Plankton membentuk dasar dari semua grup makanan akuatik dan fitoplankton menempati di tingkat pertama tropik. Dengan demikian, fitoplankton mendukung keanekaragaman hayati global, yaitu sebagai oksigen bagi biota laut, sementara mereka juga menyerap setengah dari karbon dioksida, yang dapat menyebabkan pemanasan global. Fitoplankton memiliki peran penting dalam produksi primer, siklus nutrisi, dan jaring makanan, dan mereka terdiri dari proporsi yang signifikan dari total produksi dalam sistem air. Fitoplankton menyediakan sumber makanan bagi berbagai organisme lain, terutama zooplankton. Namun Fitoplankton tertentu mempunyai peran menurunkan kualitas perairan apabila jumlahnya berlebih (blooming). Tingginya populasi fitoplankton beracun di dalam suatu perairan dapat menyebabkan berbagai akibat negatif bagi ekosistem perairan, seperti berkurangnya oksigen di dalam air yang dapat menyebabkan kematian berbagai makhluk air lainnya. Faktor yang dapat memicu ledakan populasi fitoplankton berbahaya antara lain karena adanya eutrofikasi adanya *upwelling* yang mengangkat massa air kaya unsur-unsur hara, adanya hujan lebat dan masuknya air ke danau dalam jumlah yang besar [7]. Kepadatan zooplankton dapat menurunkan kepadatan fitoplankton secara signifikan. Hal ini dapat diterangkan dengan adanya "*The Theory of Differential Growth Rate*" (Teori Perbedaan Kecepatan Tumbuh) yang dikemukakan oleh Steeman dan Nielsen (1973) yang menyebutkan bahwa pertumbuhan

zooplankton tergantung pada fitoplankton tetapi karena pertumbuhannya lebih lambat dari fitoplankton maka populasi maksimum zooplankton akan tercapai beberapa waktu setelah populasi maksimum fitoplankton berlalu.

Sebelumnya, telah diadakan banyak penelitian yang mempertimbangkan sistem fitoplankton zooplankton dengan sumber nutrisi, keberadaan plankton, pengaruh racun pada sistem plankton, atau pengaruh panen [2]-[6]. Dalam penelitian ini, penulis menganalisa model dari pengaruh racun pada sistem dinamik yang diberikan yaitu Fungsi Respon Holling Type II pada *Predator Prey System*, dengan dua zooplankton sebagai predator dan satu fitoplankton sebagai prey, dimana titik setimbang dan kestabilan pada sistem diperoleh. Dengan menggunakan Fungsi Lyapunov didapatkan kestabilan global pada sistem. Dan semua kemungkinan titik kesetimbangan dari sistem akan diuji kestabilannya. Kemudian model tersebut akan disimulasikan dengan menggunakan *software* MATLAB.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana pengaruh racun pada sistem satu fitoplankton dua zooplankton dari model yang sudah diberikan dengan fungsi respon Holling Tipe II?
2. Bagaimana kestabilan dari setiap titik setimbang pada sistem?
3. Bagaimana interpretasi hasil analisa dari model yang sudah diberikan beserta simulasinya?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang diberikan pada Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Pertumbuhan fitoplankton zooplankton yang dipengaruhi oleh racun dan faktor pemanenan

2. Menggunakan fungsi respon Holling Tipe II untuk menganalisa model

1.4 Tujuan

Tujuan dalam Tugas Akhir ini adalah:

1. Mengkaji model dan menganalisa sistem dua zooplankton satu fitoplankton yang dipengaruhi oleh racun dan faktor pemanenan
2. Mengetahui kestabilan dari setiap titik setimbang pada sistem
3. Menginterpretasikan hasil analisa dari model beserta simulasinya

1.5 Manfaat

Manfaat yang bisa diperoleh dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Mengetahui bagaimana pertumbuhan fitoplankton zooplankton yang dipengaruhi oleh racun dan faktor pemanenan
2. Sebagai referensi untuk pengembangan riset bidang ekologi laut
3. Memperoleh pengetahuan dalam menginterpretasikan hasil analisis dan simulasi pada model dari sistem dua zooplankton satu fitoplankton yang dipengaruhi oleh racun dengan menggunakan *software* MATLAB

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan tugas akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan tugas akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab II ini berisikan konsep-konsep dasar yang digunakan dalam menganalisis kestabilan pada sistem *Predator-Prey* pada satu fitoplankton dua zooplankton yang dipengaruhi oleh racun, yaitu sistem dinamik yang diberikan, titik setimbang, kestabilan lokal, dan kestabilan global dengan menggunakan Fungsi Lyapunov.

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab III ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, mengkaji model sistem dinamik pada dua zooplankton satu fitoplankton, mencari titik kesetimbangan dan kestabilan dari setiap titik setimbang, baik kestabilan lokal maupun global, simulasi model, menganalisa pengaruh racun pada sistem, dan interpretasi hasil analisa dan simulasi pada model serta penarikan kesimpulan dan menyusun laporan tugas akhir.

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab IV ini akan dibahas mengenai model dari sistem dinamik satu fitoplankton dua zooplankton yang dipengaruhi oleh racun dan adanya faktor pemanenan. Selanjutnya akan dibahas kestabilan sistem, baik lokal maupun global, dimana untuk mendapatkan kestabilan global menggunakan Fungsi Lyapunov. Dengan diperolehnya kestabilan pada sistem, maka akan disimulasikan model tersebut dengan menggunakan *software* MATLAB yang digambarkan dengan grafik.

BAB V**PENUTUP**

Bab ini berisi kesimpulan tugas akhir yang diperoleh dari bab pembahasan serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan dijelaskan mengenai tinjauan model pemanenan dari masing-masing populasi, yaitu satu fitoplankton dua zooplankton yang menjadi objek penelitian, model sistem dinamik yang diberikan, dan analisis stabilitas lokal dengan menentukan kestabilan titik setimbang dan stabilitas global dengan menggunakan Fungsi Lyapunov.

2.1 Pertumbuhan Populasi *Prey Predator*

Populasi adalah kumpulan individu dari suatu spesies yang sama yang menempati suatu tempat tertentu. Pertumbuhan populasi berarti perubahan ukuran populasi pada periode waktu tertentu. Laju perubahan suatu populasi dapat dipengaruhi oleh empat hal, yaitu tingkat kelahiran, tingkat kematian, imigrasi dan emigrasi. Laju perubahan suatu populasi dapat dimodelkan ke dalam suatu persamaan diferensial yang dapat memprediksikan pertumbuhan suatu populasi secara eksponensial. Terbatasnya sumber-sumber seperti ruang, makanan, dan adanya kepadatan populasi dapat menyebabkan populasi dibatasi oleh suatu daya dukung (*carrying capacity*) lingkungan sehingga pertumbuhan populasi secara kontinu akan menurun dan akhirnya akan berhenti atau punah. Hal ini terjadi apabila jumlah populasi sama dengan daya dukung lingkungan. Suatu populasi seringkali pertumbuhannya meningkat secara eksponensial. Pada awalnya pertumbuhan melambat, tetapi pada akhirnya naik secara signifikan dan tajam, kemudian mendekati kapasitas daya tampung, dikarenakan sumber daya yang terbatas.[8]

Untuk kasus pertumbuhan, pertumbuhan yang tidak terbatas adalah tidak realistis. Salah satu model dinamika populasi

yang paling sederhana dan lebih realistis tentang pertumbuhan populasi adalah model pertumbuhan logistik. Model pertumbuhan logistik yaitu model pertumbuhan yang memperhitungkan faktor logistik berupa ketersediaan makanan dan ruang hidup. Model ini terkait dengan kepadatan yang mencerminkan pengaruh dari persaingan intraspesifik. Selain itu, model ini mengasumsikan bahwa pada waktu tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (*equilibrium*). Pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama sehingga grafiknya mendekati konstan (*zero growth*). Berikut ini akan diberikan contoh mengenai pertumbuhan populasi pada populasi fitoplankton yaitu [9]:

Jumlah populasi fitoplankton dinotasikan dengan P . Laju netto biomassa fitoplankton ($\frac{dP}{dt}$) pada suatu daerah tertentu yang tidak ada pemanenan fitoplankton adalah:

$$\frac{dP}{dt} = F(P)$$

dengan $F(P)$ adalah laju biomassa yang merupakan fungsi dari ukuran biomassa. Jika diasumsikan bahwa daerah tersebut terbatas, maka diasumsikan populasi tersebut tumbuh secara proporsional terhadap populasi awal, secara matematis dapat ditulis:

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

dengan r dalam istilah biologi perikanan disebut sebagai laju pertumbuhan alami (*intrinsic grow rate*) atau disebut juga laju pertumbuhan tercepat yang dapat dimiliki oleh suatu jenis fitoplankton. Dalam kondisi yang ideal, laju pertumbuhan fitoplankton dapat terjadi secara eksponensial, namun karena keterbatasan daya dukung lingkungan maka ada titik maksimum dimana laju pertumbuhan akan mengalami penurunan atau berhenti. Pada titik maksimum ini disebut sebagai kapasitas daya

tampung (*carrying capacity*) lingkungan terhadap populasi fitoplankton. Dalam model logistik, fungsi logistik tersebut secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k} \right) \quad (2.1)$$

dengan r adalah laju pertumbuhan alami (*intrinsic grow rate*) dan k adalah *carrying capacity*. Berdasarkan (2.1) dalam kondisi kesetimbangan (*equilibrium*) laju pertumbuhan sama dengan nol ($\frac{dP}{dt} = 0$).

Jika pada suatu daerah tertentu dilakukan pemanenan fitoplankton maka laju perubahan netto biomassa fitoplankton ($\frac{dP}{dt}$) ditentukan oleh kemampuan reproduksi alamiah dan jumlah fitoplankton yang dipanen dari stok fitoplankton tersebut. Secara matematis, laju perubahan netto biomassa dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = F(P) - Y \quad (2.2)$$

dengan $F(P)$ adalah laju pertumbuhan alami dari stok fitoplankton, P dan Y masing-masing adalah jumlah fitoplankton dan jumlah fitoplankton yang dipanen pada waktu tertentu yang besarnya proporsional ($Y = y(t)$) dengan upaya pemanenan (E). Jika E merupakan indeks dari sarana produksi termasuk kapal dan alat panen, kemudian c merupakan koefisien pemanenan, maka jumlah fitoplankton yang dipanen dalam kurun waktu tertentu dapat dihitung dengan persamaan: $Y = cEP$

Dengan adanya kegiatan pemanenan ikan, berdasarkan (2.2) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{dP}{dt} = F(P) - Y$$

$$= rP \left(1 - \frac{P}{k} \right) - cEP$$

2.2 Model Prey Predator Sistem Holling Type II

Model Holling adalah hubungan (respon fungsional) yang menggambarkan laju pemangsaan dan ketersediaan makanan (*prey*). Pada sistem dinamik yang diberikan menggunakan fungsi respon Holling Tipe II. Model Holling tipe II menggambarkan hubungan antara *prey predator* dengan mengasumsikan adanya waktu penanganan terhadap *prey* yaitu waktu yang dibutuhkan *predator* untuk memangsa, menundukkan dan menghabiskan *prey* dalam satuan waktu. Total waktu yang dibutuhkan untuk mencari (t_s) dan menghabiskan $prey(t_h)$ persatuan waktu dapat ditulis :

$$t = t_s + t_h$$

dengan asumsi :

1. Waktu penanganan (memangsa) akan proporsional untuk jumlah tangkapan *prey* ditulis Nt_h .
2. Waktu yang tersisa bagi *predator* untuk mencari *prey* : $t - Nt_h$.

Jika dimisalkan banyaknya *prey* yang tertangkap (m) oleh *predator* berbanding lurus dengan ukuran populasi *prey* (N_s) dan waktu mencari *prey* yang tersedia maka dapat ditulis:

$$N = aN_s(t - Nt_h)$$

atau

$$N = \frac{aN_s t}{1 + aN_s t_h}$$

Jika dimisalkan $N = F_H^{II}(t)$, maka

$$F_H^{II}(t) = \frac{aN_s t}{1 + aN_s t_h}$$

Dengan $N = F_H^{II}(t)$ menyatakan banyaknya prey yang dimangsa menurut model Holling Tipe II.[10]

2.3 Sistem Dinamik dari Sistem Satu Fitoplankton Dua Zooplankton yang Dipengaruhi oleh Racun

Model sistem dinamik dari sistem satu fitoplankton dua zooplankton ini diperoleh dari fungsi respon *Holling Type II*. Berikut model matematika dari sistem *Predator-Prey* dengan upaya (E) untuk memanen populasi [3]:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\alpha xy}{a+x} - \frac{\beta xz}{b+x} - ux^3 - q_1 Ex \\ \frac{dy}{dt} &= B = \frac{mxy}{a+x} - vy^2 - d_1 y - q_2 Ey \\ \frac{dz}{dt} &= C = \frac{nxz}{b+x} - \omega z^2 - d_2 z - q_3 Ez\end{aligned}\tag{2.3}$$

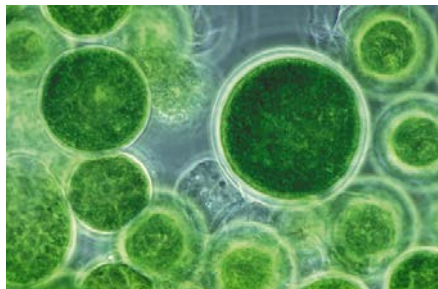
dengan:

- x : jumlah populasi fitoplankton yang memproduksi racun pada saat t dimana $x(0) = x_0 \geq 0$
- y : jumlah populasi Zooplankton I pada saat t dimana $y(0) = y_0 \geq 0$
- z : jumlah populasi Zooplankton II pada saat t dimana $z(0) = z_0 \geq 0$

- r : laju pertumbuhan intrinsik *prey*
 k : daya dukung (*carrying capacity*) lingkungan untuk mempertahankan hidup populasi *prey*
 α : laju konsumsi per kapita maksimum *predator* dari x yang berhubungan dengan y
 β : laju konsumsi per kapita maksimum *predator* dari x yang berhubungan dengan z
 a, b : konstanta jenuh
 m, n : konstanta konversi dari biomassaprey ke biomassa *predator* $0 < m < \alpha, 0 < n < \beta$
 d_1 : laju kematian alami zooplankton I
 d_2 : laju kematian alami zooplankton II
 q_1 : koefisien pemanenan populasi fitoplankton
 q_2 : koefisien pemanenan populasi zooplankton I
 q_3 : koefisien pemanenan populasi zooplankton II
 u : koefisien racun pada fitoplankton
 v : koefisien racun pada zooplankton I $0 < v < u$
 ω : koefisien racun pada zooplankton II $0 < \omega < u$

$\frac{\alpha xy}{a+x}$ dan $\frac{\beta xz}{b+x}$ adalah fungsi respon *predator*, dimana populasi zooplankton memangsa populasi fitoplankton (Holling Tipe II).

$\frac{mxy}{a+x}$ dan $\frac{nxz}{b+x}$ adalah pertumbuhan *predator*.



Gambar 2.1. Fitoplankton Jenis *Cyanophyta*



Gambar 2.2. Fitoplankton Jenis *Xanthophyta*



Gambar 2.3. Berbagai Jenis Zooplankton

Didefinisikan bahwa ux^3 menunjukkan populasi fitoplankton yang terinfeksi oleh racun. Oleh karena itu terdapat percepatan pertumbuhan zat racun dalam produksi terhadap kepadatan populasi fitoplankton dimana populasi fitoplankton sebagai spesies yang mengonsumsi makanan yang terinfeksi. Bagaimanapun, efek racun pada zooplankton lebih sedikit daripada populasi fitoplankton.



Gambar 2.4. Plankton (Fitoplankton, Zooplankton dan Bacterioplankton)

2.4 Titik Keseimbangan

Pandang persamaan diferensial sebagai berikut [1]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = h(x, y, z) \quad (2.4)$$

Sebuah titik $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ merupakan titik kesetimbangan dari (2.4) jika memenuhi $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0) = 0$, $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0) = 0$ dan $h(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan.

$x(t) \equiv \bar{x}_0$, $y(t) \equiv \bar{y}_0$, dan $z(t) \equiv \bar{z}_0$ adalah penyelesaian kesetimbangan dari (2.4) untuk semua t .

2.5 Kestabilan Sistem

2.5.1 Kestabilan Lokal

Kestabilanasimtotislokalmerupakan kestabilan dari sistem linier atau kestabilan dari linierisasi sistem tak linier. Kestabilan lokal padatitikkesimbanganditentukanolehtandapadabagian real dariakar-akarkarakteristik sistemdari matriks Jacobian yang dihitung di sekitar titik kesetimbangan [1].

Definisi 1

Jika A adalah matriks yang berukuran $n \times n$ maka dinamakan vektor karakteristik dari A yang memenuhi $Ax = \lambda x$. Untuk skalar λ disebut nilai karakteistik dari A dan x dikatakan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai karakteristik matriks A yang berukuran $n \times n$, maka dapat dituliskan kembali persamaan di atas sebagai $Ax = \lambda Ix$ atau ekuivalen dengan $(A - \lambda I)x = 0$, mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika $|A - \lambda I| = 0$.

Teorema 1:

Titiksetimbang $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ stabilasimtotisjikadanhanyajikani laikarakteristikdari

$$\text{Matriks } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial h}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{bmatrix}$$

mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

2.5.2 Kestabilan Global

Untuk menguji perilaku dinamis global dari setiap titik setimbang akan digunakan fungsi Lyapunov [1].

Definisi Lyapunov:

Diberikan u_e adalah titik setimbang yang terisolasi dari sistem dari persamaan $\frac{du}{dt} = f(u)$ di persekitaran terbuka \mathcal{D}_e dari u_e . Fungsi $V = V(u)$ disebut Fungsi Lyapunov [1] jika memenuhi:

- i. Kontinu di \mathcal{D}_e dan diferensiabel di $\mathcal{D}_e - \{u_e\}$
- ii. Memiliki minimum lokal di u_e , yaitu misalnya $V(u_e) = 0$, $V(u) > 0$ untuk $u \in \mathcal{D}'_e - \{u_e\}$ dengan \mathcal{D}'_e adalah persekitaran terbuka dari u_e
- iii. Merupakan fungsi turun dalam t dengan solusi $u(t)$ dengan kondisi awal $u(t_0) = u_0 \in \mathcal{D}_e - \{u_e\}$, yaitu $\forall t \geq 0$

$$\frac{dv}{dt}(u(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial u_i}(u(t)) \leq 0$$

Teorema Kestabilan Lyapunov:

Jika terdapat fungsi Liapunov V di persekitaran \mathcal{D}_e dari titik setimbang terisolasi u_e , kemudian u_e stabil. Selanjutnya, jika $\frac{dV}{dt}(u(t)) < 0$ maka u_e stabil asimtotik.

BAB III

METODE PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Metode penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri atas enam tahap, antara lain: studi literatur, mengkaji model sistem dinamik, mencari titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilan dari setiap titik setimbang, mengkaji dan menganalisis pengaruh racun pada pertumbuhan satu fitoplankton dua zooplankton, simulasi model dengan menggunakan *software* MATLAB, dan interpretasi hasil analisis dan simulasi serta penyusunan laporan Tugas Akhir ini.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini meliputi identifikasi permasalahan dan mencari referensi yang menunjang Tugas Akhir ini. Referensi yang dipakai adalah buku-buku literatur, jurnal ilmiah, Tugas Akhir atau Thesis yang berkaitan dengan permasalahan, maupun artikel dari internet. Mempelajari lebih dalam lagi mengenai sistem dua zooplankton satu fitoplankton yang dipengaruhi oleh racun.

3.2 Mengkaji Model Sistem Dinamik

Dalam tahap ini, penulis mengkaji Model Matematika dari sistem dinamik yang diberikan dengan menggunakan fungsi respon predator Holling Type II. Diasumsikan bahwa x , y , dan z adalah populasi fitoplankton, populasi I zooplankton, dan populasi II zooplankton pada waktu t . Basis model dari sistem dinamik yang diberikan adalah:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+x} - \frac{\beta xz}{b+x} - ux^3 - q_1 Ex \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{mxy}{a+x} - vy^2 - d_1 y - q_2 Ey \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{nxz}{b+x} - \omega z^2 - d_2 z - q_3 Ez\end{aligned}$$

Dengan ux^3 menunjukkan bahwa populasi fitoplankton terinfeksi oleh racun. Oleh karena itu terdapat percepatan pertumbuhan zat racun dalam produksi terhadap kepadatan populasi fitoplankton dimana zooplankton sebagai spesies yang mengonsumsi makanan yang terinfeksi racun (fitoplankton).

3.3 Mencari Titik Keseimbangan dan Menganalisis Kestabilan dari Setiap Titik Setimbang

Dari model matematika yang diberikan, akan dicari titik setimbangnya sehingga dapat diketahui apakah titik setimbang tersebut stabil atau tidak. Untuk menganalisis kesetimbangannya, terlebih dahulu menemukan semua kemungkinan *non-negative* titik setimbang dari sistem:

1. Titik setimbang bebas zooplankton $P'(x', 0, 0)$ dengan $y = z = 0$
2. Titik setimbang pada fitoplankton dan zooplankton I $P_1(x_1, y_1, 0)$
3. Titik setimbang pada fitoplankton dan zooplankton II $P_2(x_2, 0, z_2)$
4. Titik setimbang pada kesetimbangan interior $P^*(x^*, y^*, z^*)$

Selanjutnya akan dibuktikan kestabilan dari setiap titik setimbang yang diperoleh dengan menerapkan fungsi

Lyapunov yang diberikan, apakah sistemnya stabil asimtotik global (globally asymptotic stability) ataukah tidak.

3.4 Mengkaji dan Menganalisa Pengaruh Racun pada Pertumbuhan Satu Fitoplankton Dua Zooplankton

Dari sistem dinamik yang diberikan akan dikaji lebih lanjut mengenai pengaruh racun pada pertumbuhan Satu Fitoplankton Dua Zooplankton menurut eksperimen yang telah dilakukan pada penelitian sebelumnya dan menganalisis sifat karakteristik dari model yang diberikan.

3.5 Simulasi Model dengan Menggunakan *software* MATLAB

Dalam kegiatan ini, penulis mensimulasikan dari model yang telah didapat untuk mengetahui bagaimana grafik pertumbuhan satu fitoplankton dua zooplankton terhadap panen yang dipengaruhi oleh racun dengan memasukkan nilai parameter yang telah diperoleh dengan menggunakan *software* MATLAB.

3.6 Interpretasi Hasil Analisis dan Simulasi pada Model serta Menyusun Laporan Tugas Akhir

Setelah mengkaji, menganalisis, dan mensimulasikan model dari Pertumbuhan Satu Fitoplankton Dua Zooplankton yang dipengaruhi oleh racun, maka akan diinterpretasikan hasil analisis dan simulasi pada model tersebut. Selanjutnya, penulis akan menarik kesimpulan dari serangkain hasil analisis dan simulasi dari pengerjaan Tugas Akhir ini.

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan ditentukan kestabilan model dari sistem dinamik yang diberikan. Langkah awal yang dilakukan adalah menentukan daerah penyelesaian model, titik setimbang dari model pemanenan satu fitoplankton dua zooplankton. Selanjutnya menentukan kestabilan dari setiap titik setimbang tersebut, yaitu dibuktikan dengan Teorema Lyapunov untuk membuktikan sistem stabil asimtotis global. Kemudian hasilnya disimulasikan dengan menggunakan *software* MATLAB.

4.1 Model Sistem Dinamik pada Sistem Satu Fitoplankton Dua Zooplankton yang Dipengaruhi oleh Racun

Model dari sistem satu fitoplankton dua zooplankton [3], yang mempunyai asumsi-asumsi sebagai berikut:

a. Populasi dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu:

x : banyaknya populasi Fitoplankton yang memproduksi racun pada saat t dimana $x(0) = x_0 \geq 0$

y : banyaknya populasi Zooplankton I pada saat t dimana $y(0) = y_0 \geq 0$

z : banyaknya populasi Zooplankton II pada saat t dimana $z(0) = z_0 \geq 0$

b. Ketiga populasi saling berinteraksi

Terdapat interaksi mangsa-pemangsa antara fitoplankton dan zooplankton. Populasi zooplankton I dan II memangsa populasi fitoplankton dan fitoplankton mempunyai racun dalam jumlah banyak yang bisa menyebabkan zooplankton mati, akan tetapi jumlah zooplankton yang tumbuh karena memangsa fitoplankton lebih banyak daripada jumlah populasi zooplankton

yang mati akibat racun tersebut, sehingga model pertumbuhan populasi fitoplankton dan zooplankton adalah:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+x} - \frac{\beta xz}{b+x} - ux^3 \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{mxy}{a+x} - vy^2 - d_1y \quad (4.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{nxz}{b+x} - \omega z^2 - d_2z \quad (4.3)$$

4.2 Model Sistem Dinamik dengan Pemanenan

Pemanenan (E) satu fitoplankton dua zooplankton ini dilakukan oleh manusia, sehingga dapat menghambat pertumbuhan populasi fitoplankton, zooplankton I dan II, maka model pertumbuhan populasi dengan pemanenan adalah:

$$\frac{dx}{dt} = A = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+x} - \frac{\beta xz}{b+x} - ux^3 - q_1Ex \quad (4.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = B = \frac{mxy}{a+x} - vy^2 - d_1y - q_2Ey \quad (4.5)$$

$$\frac{dz}{dt} = C = \frac{nxz}{b+x} - \omega z^2 - d_2z - q_3Ez \quad (4.6)$$

dengan:

- r : laju pertumbuhan intrinsik *prey*
- k : daya dukung (*carrying capacity*) lingkungan untuk mempertahankan hidup populasi *prey*
- α : laju konsumsi per kapita maksimum *predator* dari x yang berhubungan dengan y
- β : laju konsumsi per kapita maksimum *predator* dari x yang berhubungan dengan z
- a, b : konstanta jenuh
- m, n : konstanta konversi dari biomassa *prey* ke biomassa *predator* $0 < m < \alpha, 0 < n < \beta$
- d_1 : laju kematian alami zooplankton I

- d_2 : laju kematian alami zooplankton II
 q_1 : koefisien pemanenan populasi fitoplankton
 q_2 : koefisien pemanenan populasi zooplankton I
 q_3 : koefisien pemanenan populasi zooplankton II
 u : koefisien racun pada fitoplankton
 v : koefisien racun pada zooplankton I $0 < v < u$
 ω : koefisien racun pada zooplankton II $0 < \omega < u$

$\frac{\alpha xy}{a+x}$ dan $\frac{\beta xz}{b+x}$ adalah fungsi respon *predator*, dimana populasi zooplankton memangsa populasi fitoplankton (Holling Tipe II).

$\frac{mxy}{a+x}$ dan $\frac{nxz}{b+x}$ adalah pertumbuhan *predator*.

4.3 Daerah Penyelesaian Model

Pada bagian ini akan diberikan analisis kualitatif dari (4.4)-(4.6). Secara biologi, model dari sistem dinamik mempunyai penyelesaian pada kuadran pertama R_+^3 dengan kondisi awal $x(0) = x_0 \geq 0$, $y(0) = y_0 \geq 0$, dan $z(0) = z_0 \geq 0$. Untuk mendapatkan batasan dari penyelesaian sistem dinamik (4.4)-(4.6) dapat dinyatakan dengan Teorema berikut [3]:

Teorema 1:

Anggap bahwa $E < \frac{r}{q_1}$, semua penyelesaian dari sistem (4.4)-(4.6) dengan kondisi awal positif untuk semua $t \geq 0$. Maka penyelesaian sistem (4.4)-(4.6) adalah terbatas seragam $\forall (x, y, z) \in R_+^3$.

Bukti:

Didefinisikan Fungsi Lyapunov $M(t) = x + \frac{\alpha}{m}y + \frac{\beta}{n}z$. Kemudian $M(t)$ diturunkan terhadap waktu, didapatkan:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{\alpha}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{\beta}{n} \frac{dz}{dt}$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} = & \left[rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\alpha xy}{a+x} - \frac{\beta xz}{b+x} - ux^3 - q_1 Ex \right] \\ & + \frac{\alpha}{m} \left[\frac{mxy}{a+x} - vy^2 - d_1 y - q_2 Ey \right] \\ & + \frac{\beta}{n} \left[\frac{nxz}{b+x} - \omega z^2 - d_2 z - q_3 Ez \right] \end{aligned}$$

Misal $d = \min \{d_1 + q_2 E, d_2 + q_3 E\}$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} + dM & \leq (r + d - q_1 E)x - \frac{r}{K}x^2 - \frac{\alpha v}{m}y^2 - \frac{\beta \omega}{n}z^2 - ux^3 \leq \\ & (r + d - q_1 E)x - \frac{r}{K}x^2 \\ & = -\frac{r}{K} \left[x^2 - \frac{2(r+d-q_1 E)x}{2\frac{r}{K}} + \frac{K^2}{4r^2}(r + d - q_1 E)^2 \right] + \\ & \frac{K}{4r}(r + d - q_1 E)^2 \leq \frac{K}{4r}(r + d - q_1 E)^2 = L > 0 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan menjadi:

$$\frac{dM}{dt} + dM \leq L$$

Sisi kanan dari pertidaksamaan di atas adalah terbatas untuk $\forall(x, y, z) \in R_+^3$ dengan $L = \frac{K}{4r}(r + d - q_1 E)^2$.

Selanjutnya, pertidaksamaan tersebut diselesaikan dengan menggunakan penyelesaian Persamaan Differensial Linear tingkat I dengan metode faktor integral.

$$\frac{dM(t)}{dt} + dM(t) = L$$

Diperoleh faktor pengintegral:

$$e^{\int d dt} = e^{dt}$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan faktor pengintegral, sehingga diperoleh:

$$\frac{dM(t)}{dt} e^{dt} + dM(t) e^{dt} = L e^{dt}$$

$$\frac{d}{dt} M(t) e^{dt} = L e^{dt}$$

Penyelesaian umum dari Persamaan Differensial Linear tingkat 1, yaitu:

$$M(t) e^{dt} = \int L e^{dt} dt + C$$

$$M(t) = e^{-dt} \int L e^{dt} dt + C e^{-dt}$$

$$M(t) = e^{-dt} \frac{L}{d} e^{dt} + C e^{-dt}$$

$$M(t) = \frac{L}{d} + C e^{-dt}$$

Untuk $t \rightarrow \infty$ maka $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \frac{L}{d}$. Dari hasil ini dapat disimpulkan bahwa $0 \leq M(t) \leq \frac{L}{d}$ yang artinya sistem pada (4.4)-(4.6) mempunyai penyelesaian dengan batas atas $\frac{L}{d}$. Hal ini membuktikan bahwa daerah penyelesaiannya dengan kondisi awal positif (x_0, y_0, z_0) adalah terbatas untuk $\forall (x, y, z) \in R_+^3$, jika $E < \frac{r}{q_1}$.

4.4 Titik Setimbang

Sebelum menentukan stabilitas lokal, terlebih dahulu ditentukan semua titik setimbang dari model (4.4)-(4.6). Titik setimbang adalah titik yang invariant terhadap waktu.

Untuk mendapatkan titik kesetimbangan pada sistem, Misal kita anggap titik setimbang $P'(x', 0, 0)$ dengan populasi zooplankton tidak ada, $y = 0$ dan $z = 0$.

Berdasarkan (4.4) diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+x} - \frac{\beta xz}{b+x} - ux^3 - q_1 Ex = 0 \\ &\Leftrightarrow r - \frac{r}{K}x - ux^2 - q_1 E = 0 \\ &\Leftrightarrow ux^2 + \frac{r}{K}x - (r - q_1 E) = 0\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai x dari persamaan kuadrat di atas:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{r}{K} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{K}\right)^2 + 4u(r - q_1 E)}}{2u} \quad (4.7)$$

Karena x positif, maka dari persamaan (4.7) diperoleh:

$$x' = \frac{-\frac{r}{K} + \sqrt{\left(\frac{r}{K}\right)^2 + 4u(r - q_1 E)}}{2u}$$

dengan syarat $\sqrt{\left(\frac{r}{K}\right)^2 + 4u(r - q_1 E)} > \frac{r}{K}$ dan $r > q_1 E$. dimana $R_p = \frac{r}{q_1 E}$. Sehingga, terdapat titik kesetimbangan bebas zooplankton $P'(x', 0, 0)$.

Selanjutnya, akan dibahas titik setimbang dari fitoplankton dan zooplankton I $P_1(x_1, y_1, 0)$.

Berdasarkan sistem (4.4) dan (4.5) dikatakan setimbang jika $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ sehingga diperoleh:

$$r \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \frac{\alpha y_1}{a + x_1} - u x_1^2 - q_1 E = 0$$

dan

$$\frac{m x_1}{a + x_1} - v y - d_1 - q_2 E = 0$$

sehingga diperoleh nilai

$$y_1 = \frac{1}{\alpha} (a + x_1) \left[r \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - u x_1^2 - q_1 E \right] \quad (4.8)$$

$$y_1 = \frac{1}{v} \left[\frac{m x_1}{a + x_1} - d_1 - q_2 E \right] \quad (4.9)$$

Dengan mensubstitusikan (4.8) dan (4.9), maka didapat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} (a + x_1) \left[r \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - u x_1^2 - q_1 E \right] &= \frac{1}{v} \left[\frac{m x_1}{a + x_1} - d_1 - q_2 E \right] \\ v(a + x_1) \left[r \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - u x_1^2 - q_1 E \right] &= \alpha \left[\frac{m x_1}{a + x_1} - d_1 - q_2 E \right] \\ v(a + x_1) \left[r - r \frac{x_1}{K} - u x_1^2 - q_1 E \right] &= \alpha \left[\frac{m x_1 - d_1(a + x_1) - q_2 E(a + x_1)}{a + x_1} \right] \\ v(a + x_1) \left[\frac{rK - r x_1 - u x_1^2 K - q_1 E K}{K} \right] &= \alpha \left[\frac{m x_1 - d_1(a + x_1) - q_2 E(a + x_1)}{a + x_1} \right] \\ v(a + x_1)(a + x_1)(rK - r x_1 - u x_1^2 K - q_1 E K) &= \alpha K (m x_1 - d_1(a + x_1) - q_2 E(a + x_1)) \\ v(a^2 + 2a x_1 + x_1^2)(rK - r x_1 - K u x_1^2 - K q_1 E) &= \alpha K (m x_1 - a d_1 - d_1 x_1 - a q_2 E - q_2 E x_1) \\ a^2 v r K - a^2 v r x_1 - a^2 v u K x_1^2 - a^2 v q_1 E K + a v r K x_1 - & \\ a v r x_1^2 - a u v K x_1^3 - a v q_1 E K x_1 + a v r K x_1 - a v r x_1^2 - & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& auvKx_1^3 - avq_1EKx_1 + vrKx_1^2 - vrx_1^3 - Kuvx_1^4 - \\
& vq_1KEx_1^2 = \alpha Kmx_1 - \alpha \alpha Kd_1 - \alpha Kd_1x_1 - \alpha Kaq_2E - \\
& \quad \alpha Kq_2Ex_1 \\
& 0 = Kuvx_1^4 + v(r + 2auK)x_1^3 + (Kuva^2 + 2avr - \\
& Kv(r - q_1E))x_1^2 + (a^2vr + \alpha K(m - d_1 - q_2E) - 2avK(r - \\
& q_1E))x_1 + (a^2vK(q_1E - r) - \alpha Ka(d_1 + q_2E))
\end{aligned}$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi:

$$A_1x_1^4 + A_2x_1^3 + A_3x_1^2 + A_4x_1 + A_5 = 0 \quad (4.10)$$

dengan:

$$A_1 = Kuv$$

$$A_2 = v(2aKu + r)$$

$$A_3 = Kuva^2 + 2avr - Kv(r - q_1E)$$

$$A_4 = a^2vr - K\alpha(m - d_1 - q_2E) - 2avK(r - q_1E)$$

$$A_5 = a^2vK(q_1E - r) - Ka\alpha(d_1 + q_2E)$$

Berdasarkan (4.10) akan diperoleh nilai x_1 dengan memasukkan semua nilai parameter pada persamaan derajat tingkat 4. Dan untuk mendapatkan nilai y_1 bisa memasukkan nilai dari x_1 pada persamaan (4.8) dan (4.9).

Jadi, terdapat titik kesetimbangan pada fitoplankton dan zooplankton I $P_1(x_1, y_1, 0)$.

Usaha pemanenan pada predator dapat mengurangi ukuran populasi *predator*. Oleh karena itu, konstanta biomassa zooplankton harus positif, karena jika negatif maka usaha pemanenan dapat menambah populasi *prey* (fitoplankton) namun itu tidak logis, sehingga usaha pemanenan harus dibatasi dengan

$$r \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - ux_1^2 - q_1E > 0$$

atau

$$r - u \left(x_1^2 + 2x_1 \frac{r}{2Ku} + \frac{r^2}{4K^2u^2} \right) + \frac{r^2}{4K^2u} - q_1E > 0$$

$$q_1 E < r + \frac{r^2}{4K^2 u} - u \left(x_1 + \frac{r}{2Ku} \right)^2 < r + \frac{r^2}{4K^2 u}$$

Sehingga diperoleh

$$E < \frac{1}{q_1} \left(r + \frac{r^2}{4K^2 u} \right) = E^{11}$$

Selanjutnya, berdasarkan (4.8) diperoleh

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{v} \left[\frac{mx_1}{a+x_1} - d_1 - q_2 E \right] > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{mx_1}{a+x_1} - d_1 - q_2 E &> 0 \end{aligned}$$

atau

$$(d_1 + q_2 E) < \frac{mx_1}{a+x_1}$$

karena nilai $\frac{x_1}{a+x_1} < 1$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} m - d_1 &> q_2 E \\ \Leftrightarrow E &< \frac{m - d_1}{q_2} = E^{12} \end{aligned}$$

Sehingga, usaha pemanenan dapat dibatasi dengan

$$0 < E < \min \{E^{11}, E^{12}\}$$

Berikutnya, akan dicari titik setimbang dari fitoplankton dan zooplankton II $P_2(x_2, 0, z_2)$.

Berdasarkan (4.4) dan (4.6) dikatakan setimbang jika $\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$. Maka dimasukkan nilai $y = 0$ pada (4.4), sehingga diperoleh:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\alpha xy}{a+x} - \frac{\beta xz}{b+x} - ux^3 - q_1 Ex = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow r \left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - \frac{\alpha y_2}{a + x_2} - \frac{\beta z_2}{b + x_2} - u x_2^2 - q_1 E = 0 \\
&\Leftrightarrow r \left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - \frac{\beta z_2}{b + x_2} - u x_2^2 - q_1 E = 0 \\
&\Leftrightarrow r \left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - u x_2^2 - q_1 E = \frac{\beta z_2}{b + x_2} \\
&\frac{b + x_2}{\beta} \left(r \left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - u x_2^2 - q_1 E \right) = z_2 \\
&\frac{1}{\beta} (b + x_2) r \left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - u x_2^2 - q_1 E = z_2
\end{aligned}$$

Dan jika dimasukkan nilai $y = 0$ pada persamaan (4.6), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
&\frac{dz}{dt} = \frac{nxz}{b + x} - \omega z^2 - d_2 z - q_3 E z = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{nx_2}{b + x_2} - \omega z_2 - d_2 - q_3 E = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{nx_2}{b + x_2} - d_2 - q_3 E = \omega z_2 \\
&\frac{1}{\omega} \left(\frac{nx_2}{b + x_2} - d_2 - q_3 E \right) = z_2
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh nilai

$$z_2 = \frac{1}{\beta} (b + x_2) r \left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - u x_2^2 - q_1 E \quad (4.11)$$

$$z_2 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{nx_2}{b + x_2} - d_2 - q_3 E \right) \quad (4.12)$$

Dengan mensubstitusikan (4.11) dan (4.12), maka didapat:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta} (b + x_2) \left[r \left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - u x_2^2 - q_1 E \right] = \frac{1}{\omega} \left[\frac{nx_2}{b + x_2} - d_2 - q_3 E \right] \\
&\omega (b + x_2) \left[r \left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - u x_2^2 - q_1 E \right] = \beta \left[\frac{nx_2}{b + x_2} - d_2 - q_3 E \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(b+x_2) \left[r - r \frac{x_2}{K} - ux_2^2 - q_1 E \right] &= \beta \left[\frac{nx_2 - d_2(b+x_2) - q_3 E(b+x_2)}{b+x_2} \right] \\
\omega(b+x_2) \left[\frac{rK - rx_2 - ux_2^2 K - q_1 EK}{K} \right] &= \beta \left[\frac{nx_2 - d_2(b+x_2) - q_3 E(b+x_2)}{b+x_2} \right] \\
\omega(b+x_2)(b+x_2)(rK - rx_2 - ux_2^2 K - q_1 EK) &= \beta K(nx_2 - d_2(b+x_2) - q_3 E(b+x_2)) \\
b^2 \omega r K - b^2 \omega r x_2 - b^2 \omega u K x_2^2 - b^2 \omega q_1 EK + b \omega r K x_2 - & \\
b \omega r x_2^2 - b u \omega K x_2^3 - b \omega q_1 EK x_2 + b \omega r K x_2 - b \omega r x_2^2 - & \\
b u \omega K x_2^3 - b \omega q_1 EK x_2 + \omega r K x_2^2 - \omega r x_2^3 - K u \omega x_2^4 - & \\
\omega q_1 K E x_2^2 = \beta K n x_2 - \beta b K d_2 - \beta K d_2 x_2 - \beta K b q_3 E - & \\
\beta K q_3 E x_2 & \\
0 = K u \omega x_2^4 + \omega(r + 2b u K) x_2^3 + (K u \omega b^2 + 2b \omega r - & \\
K \omega(r - q_1 E)) x_2^2 + (b^2 \omega r + \beta K(n - d_2 - q_3 E) - 2b \omega K(r - & \\
q_1 E)) x_2 + (b^2 \omega K(q_1 E - r) - \beta K b(d_2 + q_3 E)) &
\end{aligned}$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi:

$$B_1 x_2^4 + B_2 x_2^3 + B_3 x_2^2 + B_4 x_2 + B_5 = 0 \quad (4.13)$$

dengan:

$$B_1 = Ku\omega$$

$$B_2 = \omega(2bKu + r)$$

$$B_3 = Ku\omega b^2 + 2b\omega r - K\omega(r - q_1 E)$$

$$B_4 = b^2 \omega r - K\beta(n - d_2 - q_3 E) - 2b\omega K(r - q_1 E)$$

$$B_5 = b^2 \omega K(q_1 E - r) - Kb\beta(d_2 + q_3 E)$$

Berdasarkan (4.13) akan diperoleh nilai x_1 dengan cara yang sama, yaitu dengan memasukkan semua nilai parameter pada persamaan derajat tingkat 4. Dan untuk mendapatkan nilai y_1 bisa memasukkan nilai dari x_1 pada persamaan (4.11) dan (4.12).

Jadi, terdapat titik kesetimbangan pada fitoplankton dan zooplankton II $P_2(x_2, 0, z_2)$.

Usaha pemanenan pada predator dapat mengurangi ukuran populasi *predator*. Oleh karena itu, konstanta biomassa

zooplankton harus positif, karena jika negatif maka usaha pemanenan dapat menambah populasi *prey* (fitoplankton) namun itu tidak logis, sehingga usaha pemanenan harus dibatasi dengan

$$r \left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - ux_2^2 - q_1E > 0$$

atau

$$\begin{aligned} r - u \left(x_2^2 + 2x_2 \frac{r}{2Ku} + \frac{r^2}{4K^2u^2} \right) + \frac{r^2}{4K^2u} - q_1E &> 0 \\ \Leftrightarrow q_1E &< r + \frac{r^2}{4K^2u} - u \left(x_2 + \frac{r}{2Ku} \right)^2 < r + \frac{r^2}{4K^2u} \\ E &< \frac{1}{q_1} \left(r + \frac{r^2}{4K^2u} \right) = E^{21} \end{aligned}$$

Lalu, dengan persamaan (4.12) diperoleh:

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{\omega} \left[\frac{nx_2}{b+x_2} - d_2 - q_3E \right] > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{nx_2}{b+x_2} - d_2 - q_3E &> 0 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh:

$$(d_2 + q_3E) < \frac{nx_2}{b+x_2}$$

karena nilai $\frac{x_2}{b+x_2} < 1$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} n - d_2 &> q_3E \\ \Leftrightarrow E &< \frac{n - d_2}{q_3} = E^{22} \end{aligned}$$

Sehingga, usaha pemanenan dapat dibatasi dengan

$$0 < E < \min \{E^{21}, E^{22}\}$$

Selanjutnya adalah menentukan titik kesetimbangan interior $P^*(x^*, y^*, z^*)$.

Dari sistem (4.4)-(4.6) dikatakan setimbang jika $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$. Diperoleh dari (4.5) dan (4.6) sebagai berikut:

$$y^* = \frac{1}{v} \left[\frac{mx^*}{a+x^*} - d_1 - q_2 E \right] \quad (4.14)$$

$$z^* = \frac{1}{\omega} \left[\frac{nx^*}{b+x^*} - d_2 - q_3 E \right] \quad (4.15)$$

dengan mensubstitusikan (4.14) dan (4.15) ke dalam (4.4), sehingga dapat disederhanakan menjadi:

$$C_1 x^{*6} + C_2 x^{*5} + C_3 x^{*4} + C_4 x^{*3} + C_5 x^{*2} + C_6 x^* + C_7 = 0 \quad (4.16)$$

dengan:

$$C_1 = Kuv\omega$$

$$C_2 = vr\omega + 2uKv\omega(a+b)$$

$$C_3 = vr\omega(2a+2b-K) + Kv\omega(a^2u+b^2u+4abu+q_1E)$$

$$C_4 = 2abuv\omega K(a+b) + vr\omega(a^2+b^2+4ab) + 2v\omega Kq_1E(a+b) + \alpha K\omega(m-d_1-q_1E) + \beta Kv(n-d_2-q_3E) - 2rv\omega K(a+b)$$

$$C_5 = v\omega K(a^2b^2u+q_1E(a^2+b^2+4ab)) + K\omega\alpha(2b(m-d_1-q_2E) - a(d_1+q_2E)) + \beta Kv(2a(n-d_2-q_3E) - b(d_2+q_3E)) + rv\omega(2ab(a+b) - K(a^2+b^2+4ab))$$

$$C_6 = 2abv\omega Kq_1E(a+b) + K\omega\alpha(b^2(m-d_1-q_2E) - 2ab(d_1+q_2E)) + \beta Kv(a^2(n-d_2-q_3E) - 2ab(d_2+q_3E)) + a^2b^2rv\omega - 2abKrv\omega(a+b)$$

$$C_7 = a^2b^2v\omega Kq_1E - ab^2K\omega\alpha(d_1+q_2E) - a^2b\beta Kv(d_2+q_3E) - a^2b^2rv\omega$$

Berdasarkan (4.16) akan diperoleh nilai x^* dengan cara yang sama, yaitu dengan memasukkan semua nilai parameter

pada persamaan derajat tingkat 6. Dan untuk mendapatkan nilai y^* dan z^* bisa memasukkan nilai dari x^* pada (4.14) dan (4.15).

Jadi, terdapat titik setimbang pada kesetimbangan interior $P^*(x^*, y^*, z^*)$.

Setelah menentukan titik setimbang model, selanjutnya akan ditentukan titik kestabilan dari setiap titik setimbang. Untuk itu terlebih dahulu dicari nilai eigen dari matriks Jacobian dari model.

4.5 Penyelesaian Kestabilan Lokal dan Global

Berdasarkan persamaan (4.4)-(4.6) diketahui:

$$\frac{dx}{dt} = A(x, y, z) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a + x} - \frac{\beta xz}{b + x} - ux^3 - q_1 Ex$$

$$\frac{dy}{dt} = B(x, y, z) = \frac{mxy}{a + x} - vy^2 - d_1 y - q_2 Ey$$

$$\frac{dz}{dt} = C(x, y, z) = \frac{nxz}{b + x} - \omega z^2 - d_2 z - q_3 Ez$$

akan dicari titik kestabilan lokal dengan mencari matriks Jacobiannya terlebih dahulu.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial A}{\partial z} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} & \frac{\partial B}{\partial z} \\ \frac{\partial C}{\partial x} & \frac{\partial C}{\partial y} & \frac{\partial C}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

dimana

$$\frac{\partial A}{\partial x} = r \left(1 - \frac{2x}{k} \right) - \frac{a\alpha y}{(a+x)^2} - \frac{b\beta z}{(b+x)^2} - 3ux^2 - q_1 E$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\alpha x}{a+x}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\beta x}{b+x}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{amy}{(a+x)^2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{mx}{a+x} - 2vy - d_1 - q_2 E$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{bnz}{(b+x)^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{nx}{b+x} - 2\omega z - d_2 - q_3 E$$

Selanjutnya nilai eigen diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $|A - \lambda I| = 0$ dengan I adalah matriks identitas. Untuk kestabilan lokal titik setimbang dilakukan penyelesaian sebagai berikut:

4.5.1 Pada Titik Setimbang $P_0(0, 0, 0)$

$$A(P_0) = \begin{bmatrix} r - q_1E & 0 & 0 \\ 0 & -d_1 - q_2E & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 - q_3E \end{bmatrix}$$

dengan persamaan karakteristik $|A - \lambda I| = 0$, maka diperoleh

$$\Leftrightarrow (r - q_1E - \lambda)(-d_1 - q_2E - \lambda)(-d_2 - q_3E - \lambda) = 0$$

didapatkan akar-akar karakteristiknya:

$$\lambda_1 = r - q_1E, \quad \lambda_2 = -d_1 - q_2E < 0, \text{ dan}$$

$$\lambda_3 = -d_2 - q_3E < 0 \text{ dengan } \lambda_1 < 0 \text{ jika } E > \frac{r}{q_1}.$$

Titik setimbang $P_0(0,0,0)$ stabil jika tingkat pemanenan melebihi BTP (rasio $\frac{r}{q_1}$ dari potensi biotik (r) dengan koefisien pemanenan (q_1) yang disebut sebagai *Biotechnical Productivity* (BTP) dari populasi x) dari fitoplankton. Padahal, telah diketahui bahwa nilai dari $E < \frac{r}{q_1}$, maka titik setimbang $P_0(0,0,0)$ selalu tidak stabil.

Untuk mengetahui perilaku dinamis global dari titik setimbang $P_0(0,0,0)$ didefinisikan fungsi Lyapunov sebagai berikut [3]:

$$V(x, y, z) = x + \frac{\alpha}{m}y + \frac{\beta}{n}z$$

dengan menurunkan fungsi waktu dan dengan menggunakan sistem dinamik untuk semua titik setimbang, didapatkan:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (r - q_1E)x - \frac{\alpha}{m}(d_1 + q_2E)y - \frac{\beta}{n}(d_2 + q_3E)z - \\ &\quad \left(\frac{r}{K}x^2 + \frac{\alpha v}{m}y^2 + \frac{\beta \omega}{n}z^2 \right) - ux^3 \leq (r - q_1E)x \end{aligned}$$

karena semua suku bernilai negatif, maka terbukti $(r - q_1 E) < 0$ maka $\frac{dV}{dt} < 0$. Oleh karena itu, Teorema Lyapunov ini mendefinisikan bahwa semua solusi mendekati titik setimbang P_0 .

Teorema 1. Titik setimbang $P_0(0, 0, 0)$ merupakan stabil asimtotik global jika $E > \frac{r}{q_1}$

Dari sudut pandang Biologi, jelas bahwa eksploitasi berlebih $E > \frac{r}{q_1}$ akan menghasilkan kepunahan populasi yg besar.

4.5.2 Pada Titik Setimbang $P'(x', 0, 0)$

$$A(P') = \begin{bmatrix} r \frac{x'}{K} - 3ux'^2 & -\frac{\alpha x'}{a+x'} & -\frac{\beta x'}{b+x'} \\ 0 & -d_1 - q_2 E & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 - q_3 E \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

dengan persamaan karakteristik $|A - \lambda I| = 0$, maka diperoleh persamaan karakteristik dari (4.18):

$$\left(\frac{mx'}{a+x} - d_1 - q_2 E - \lambda \right) \left(\frac{nx'}{b+x} - d_2 - q_3 E - \lambda \right) \left(-r \frac{x'}{K} - 3ux'^2 - \lambda \right) = 0$$

didapatkan akar-akar karakteristiknya:

$$\lambda_1 = \frac{mx'}{a+x} - d_1 - q_2 E, \quad \lambda_2 = \frac{nx'}{b+x} - d_2 - q_3 E, \text{ dan} \\ \lambda_3 = -r \frac{x'}{K} - 3ux'^2$$

Jadi, diperoleh titik setimbang $P'(x', 0, 0)$ dikatakan stabil jika $m < d_1 + q_2 E, n < d_2 + q_3 E$ dimana $\frac{x'}{a+x} < 1$ dan $\frac{x'}{b+x} < 1$.

Teorema 2. Titik setimbang bebas dari zooplankton $P'(x', 0, 0)$ adalah stabil asimtotik global.

Untuk mengecek apakah $P'(x', 0, 0)$ stabil asimtotik global adalah dengan mendefinisikan fungsi Lyapunov, yaitu [3]:

$$V'(x, y, z) = \int_{x'}^x \frac{e - x'}{e} de + p' \int_0^y df + q' \int_0^z dg$$

dengan p' dan q' adalah konstanta dimana $p' = \frac{\alpha}{am}, q' = \frac{\beta}{bn}$ sehingga diperoleh:

$$\frac{dV'}{dt} = \frac{(x - x')}{x} \frac{dx}{dt} + p' \frac{dy}{dt} + q' \frac{dz}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV'}{dt} = & (x - x') \left[\frac{r}{k} (x - x') - \alpha \frac{y}{a+x} - \beta \frac{z}{b+x} - u(x^2 - x'^2) \right] + \\ & p'y \left[\frac{mx}{a+x} - \frac{mx'}{a+x'} - vy \right] + q'z \left[\frac{nx}{b+x} - \frac{nx'}{b+x'} - \omega z \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV'}{dt} = & (x - x')^2 \left[-\frac{r}{K} - u(x + x') \right] - y^2 \frac{\alpha v}{am} - z^2 \frac{\beta \omega}{bn} \\ = & -X'^T A' X' \end{aligned}$$

dimana $X'^T = [x - x', y, z]$

$$\text{dan } A' = \begin{bmatrix} \frac{r}{K} + u(x + x') & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha v}{am} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta \omega}{bn} \end{bmatrix}$$

Sistem merupakan stabil asimtotik global pada $P'(x', 0, 0)$ jika $\frac{dV'}{dt} < 0$ yaitu jika A' definit positif. Jadi, titik setimbang pada $P'(x', 0, 0)$ adalah stabil asimtotik global.

4.5.3 Pada Titik Setimbang $P_1(x_1, y_1, 0)$

$$A(P_1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

dimana

$$a_{11} = r \left(1 - \frac{2x}{K} \right) - \frac{a\alpha y_1}{(a+x_1)^2} - 3ux_1^2 - q_1E$$

$$a_{12} = -\frac{\alpha x_1}{a+x_1}$$

$$a_{13} = -\frac{\beta x}{b+x}$$

$$a_{21} = \frac{a\alpha y_1}{(a+x_1)^2}$$

$$a_{22} = \frac{mx_1}{a+x_1} - 2vy_1 - d_1 - q_2E$$

$$a_{31} = -2\omega z - d_2 - q_3E$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari (4.19):

$$\left(\frac{nx_1}{b+x_1} - d_1 - q_2E - \lambda \right) \left(-\lambda^2 - \lambda \left(vy_1 + \frac{rx_1}{K} + 3ux_1^2 - \frac{\alpha x_1 y_1}{(a+x_1)^2} \right) - \left(vy_1 \left(\frac{rx_1}{K} + 3ux_1^2 - \frac{\alpha x_1 y_1}{(a+x_1)^2} \right) + \frac{max_1 y_1}{(a+x_1)^2} \right) \right) = 0$$

didapatkan akar-akar karakteristiknya $\lambda_1 = \frac{nx_1}{b+x_1} - d_1 - q_2E$,

λ_2, λ_3 dimana $\lambda_2 + \lambda_3 = - \left(vy_1 + \frac{rx_1}{K} + 3ux_1^2 - \frac{\alpha x_1 y_1}{(a+x_1)^2} \right)$

$$\lambda_2 \lambda_3 = \left(vy_1 \left(\frac{rx_1}{K} + 3ux_1^2 - \frac{\alpha x_1 y_1}{(a+x_1)^2} \right) + \frac{max_1 y_1}{(a+x_1)^2} \right)$$

Jadi, diperoleh titik setimbang $P_1(x_1, y_1, 0)$ dikatakan stabil jika $n < d_2 + q_3E$ dan $\frac{r}{K} < \frac{\alpha y_1}{(a+x_1)^2}$.

Teorema 3. Titik setimbang yang bebas dari zooplankton II $P_1(x_1, y_1, 0)$ adalah stabil asimtotik global jika $\frac{r}{K} + u(x + x_1) > \frac{\alpha y_1}{(a+x)(a+x_1)}$ dan $v > \frac{mx_1}{(a+x)(a+x_1)}$

Untuk mengecek apakah $P_1(x_1, y_1, 0)$ stabil asimtotik global adalah didefinisikan fungsi Lyapunov, yaitu [3]:

$$V_1(x, y, z) = \int_{x_1}^x \frac{e - x_1}{e} de + p_1 \int_{y_1}^y \frac{f - y_1}{f} df + q_1 \int_0^z dg$$

dengan p' dan q' adalah konstanta dimana $p_1 = \frac{\alpha}{m}, q_1 = \frac{\beta}{n}$ sehingga diperoleh:

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{(x - x_1)}{x} \frac{dx}{dt} + p_1 \frac{(y - y_1)}{y} \frac{dy}{dt} + q_1 \frac{dz}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} = & (x - x_1) \left[\frac{r}{K} (x - x_1) - \alpha \left(\frac{y}{a+x} - \frac{y_1}{a+x_1} \right) - \beta \frac{z}{b+x} - \right. \\ & \left. u(x^2 - x_1^2) \right] + p_1 (y - y_1) \left[\frac{mx}{a+x} - \frac{mx_1}{a+x_1} - v(y - y_1) \right] + \\ & q_1 z \left[\frac{nx}{b+x} - \frac{nx_1}{b+x_1} - \omega z \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} = & (x - x_1)^2 \left[-\frac{r}{K} - u(x + x_1) + \frac{\alpha y_1}{(a+x)(a+x_1)} \right] + \\ & (y - y_1)^2 \left[\frac{\alpha y_1}{(a+x)(a+x_1)} - \frac{\alpha v}{m} \right] - z^2 \frac{\beta \omega}{bn} = -X_1^T A_1 X_1 \end{aligned}$$

dimana $X_1^T = [x - x_1, y - y_1, z]$

dan

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{K} + u(x + x_1) - \frac{\alpha y_1}{(a+x)(a+x_1)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha y_1}{(a+x)(a+x_1)} + \frac{\alpha v}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta \omega}{bn} \end{bmatrix}$$

$A_1 =$

Sistem merupakan stabil asimtotik global pada $P_1(x_1, y_1, 0)$ jika $\frac{dV_1}{dt} < 0$ yaitu jika A_1 definit positif. Jadi, titik setimbang pada $P_1(x_1, y_1, 0)$ adalah stabil asimtotik global jika $\frac{r}{K} + u(x + x_1) > \frac{\alpha y_1}{(a+x)(a+x_1)}$ dan $v > \frac{mx_1}{(a+x)(a+x_1)}$.

4.5.4 Pada Titik Setimbang $P_2(x_2, 0, z_2)$

$$A(P_2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

dimana

$$a_{11} = r \left(1 - \frac{2x}{K} \right) - \frac{b\beta z_2}{(b + x_2)^2} - 3ux_2^2 - q_1E$$

$$a_{12} = -\frac{\alpha x_2}{a + x_2}$$

$$a_{13} = -\frac{\beta x_2}{b + x_2}$$

$$a_{22} = \frac{mx_2}{a + x_2} - d_1 - q_2E$$

$$a_{31} = -\frac{bnz_2}{(b + x_2)^2}$$

$$a_{33} = -2\omega z - d_2 - q_3E$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari (4.20):

$$\left(\frac{mx_2}{a+x_2} - d_1 - q_2E - \lambda\right) \left(-\lambda^2 - \lambda\left(\omega z_2 + \frac{rx_2}{K} + 3ux_2^2 - \frac{\beta x_2 z_2}{(b+x_2)^2}\right)\right) - \left(\omega z_2 \left(\frac{rx_2}{K} + 3ux_2^2 - \frac{\beta x_2 z_2}{(b+x_2)^2}\right) + \frac{\beta n x_2 z_2}{(b+x_2)^2}\right) = 0$$

didapatkan akar-akar karakteristiknya:

$$\lambda_1 = \frac{mx_2}{a+x_2} - d_1 - q_2E, \quad \lambda_2, \lambda_3 \text{ dimana } \lambda_2 + \lambda_3 = -\left(\omega z_2 + \frac{rx_2}{K} + 3ux_2^2 - \frac{\beta x_2 z_2}{(b+x_2)^2}\right)$$

$$\lambda_2 \lambda_3 = \left(\omega z_2 \left(\frac{rx_2}{K} + 3ux_2^2 - \frac{\beta x_2 z_2}{(b+x_2)^2}\right) + \frac{\beta n x_2 z_2}{(b+x_2)^2}\right)$$

Jadi, diperoleh titik setimbang $P_2(x_2, 0, z_2)$ dikatakan stabil jika $m < d_1 + q_2E$ dan $\frac{r}{K} < \frac{\alpha z_2}{(b+x_2)^2}$.

Teorema 4. Titik setimbang yang bebas dari zooplankton I $P_2(x_2, 0, z_2)$ adalah stabil asimtotik global jika $\frac{r}{K} + u(x + x_1) > \frac{\alpha y_1}{(a+x)(a+x_1)}$ dan $\omega > \frac{nx_2}{(b+x)(b+x_2)}$

Untuk mengecek apakah $P_2(x_2, 0, z_2)$ stabil asimtotik global adalah didefinisikan fungsi Lyapunov, yaitu[3]:

$$V_2(x, y, z) = \int_{x_2}^x \frac{e - x_2}{e} de + p_2 \int_0^y df + q_2 \int_{z_2}^z \frac{g - z_2}{g} dg$$

dengan p' dan q' adalah konstanta dimana $p_2 = \frac{\alpha}{am}$, $q_2 = \frac{\beta}{n}$ sehingga diperoleh:

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{(x - x_2)}{x} \frac{dx}{dt} + p_2 \frac{dy}{dt} + q_2 \frac{(z - z_2)}{z} \frac{dz}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} = (x - x_2) & \left[\frac{r}{k}(x - x_2) - \alpha \frac{y}{a+x} - \beta \left(\frac{z}{b+x} - \frac{z_2}{b+x_2} \right) - \right. \\ & \left. u(x^2 - x_2^2) \right] + p_2 y \left[\frac{mx}{a+x} - \frac{mx_2}{a+x_2} - vy \right] + q_2 (z - \\ & z_2) \left[\frac{nx}{b+x} - \frac{nx_2}{b+x_2} - \omega(z - z_2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} = (x - x_2)^2 & \left[-\frac{r}{K} - u(x + x_2) + \frac{\beta z_2}{(b+x)(b+x_2)} \right] - y^2 \frac{\alpha v}{am} + \\ & (z - z_2)^2 \left[\frac{\beta z_2}{(b+x)(b+x_2)} - \frac{\beta \omega}{bn} \right] = -X_2^T A_2 X_2 \end{aligned}$$

dimana $X_2^T = [x - x_2, y, z - z_2]$

dan

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{r}{K} + u(x + x_2) - \frac{\beta z_2}{(b+x)(b+x_2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha v}{am} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta z_2}{(b+x)(b+x_2)} + \frac{\beta \omega}{bn} \end{bmatrix}$$

Sistem merupakan stabil asimtotik global pada $P_2(x_2, 0, z_2)$ jika $\frac{dV_1}{dt} < 0$ yaitu jika A_2 definit positif. Jadi, titik setimbang pada $P_2(x_2, 0, z_2)$ adalah stabil asimtotik global jika $\frac{r}{K} + u(x + x_1) > \frac{\alpha y_1}{(a+x)(a+x_1)}$ dan $\omega > \frac{nx_2}{(b+x)(b+x_2)}$.

4.5.5 Pada Titik Setimbang $P^*(x^*, y^*, z^*)$

$$J(P^*) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

dimana

$$a_{11} = r \left(1 - \frac{2x^*}{k} \right) - \frac{a\alpha y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{b\beta z^*}{(b+x^*)^2} - 3ux^{*2} - q_1 E$$

$$a_{12} = \frac{\alpha x^*}{a+x^*}$$

$$a_{13} = \frac{\beta x^*}{b+x^*}$$

$$a_{21} = \frac{a\alpha y^*}{(a+x^*)^2}$$

$$a_{22} = \frac{mx^*}{a+x^*} - 2vy^* - d_1 - q_2 E$$

$$a_{31} = \frac{bnz^*}{(b+x^*)^2}$$

$$a_{33} = \frac{nx^*}{b+x^*} - 2\omega z^* - d_2 - q_3 E$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari persamaan (4.21):
 $(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0$

dimana:

$$\begin{aligned} a_1 &= vy^* + \omega z^* + 2ux^* + \frac{rx^*}{K} - \frac{\alpha x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\beta x^* z^*}{(b+x^*)^2} \\ a_2 &= v\omega y^* z^* + \frac{a\alpha m x^* y^*}{(a+x^*)^3} - \frac{\beta b n x^* z^*}{(b+x^*)^3} + (vy^* + \omega z^*) \left(2ux^{*2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{rx^*}{K} - \frac{\alpha x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\beta x^* z^*}{(b+x^*)^2} \right) \\ a_3 &= \frac{\alpha \omega a m x^* y^* z^*}{(a+x^*)^3} + \frac{\beta v b n x^* y^* z^*}{(b+x^*)^3} + v\omega y^* z^* \left(2ux^{*2} + \frac{rx^*}{K} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha x^* y^*}{(a+x^*)^2} - \frac{\beta x^* z^*}{(b+x^*)^2} \right) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$a_1 > 0 \text{ jika } vy^* + \omega z^* + 2ux^* + \frac{rx^*}{K} > \frac{\alpha x^* y^*}{(a+x^*)^2} + \frac{\beta x^* z^*}{(b+x^*)^2}$$

dan

$$a_3 > 0 \text{ jika } \frac{\alpha amx^*}{v(a+x^*)^3} + \frac{\beta bnx^*}{\omega(b+x^*)^3} + 2ux^{*2} + \frac{rx^*}{K} > \frac{\alpha x^* y^*}{(a+x^*)^2} + \frac{\beta x^* z^*}{(b+x^*)^2}$$

Oleh karena itu, sistem stabil lokal pada titik setimbang interior $P^*(x^*, y^*, z^*)$ jika

$$vy^* + \omega z^* + 2ux^* + \frac{rx^*}{K} > \frac{\alpha x^* y^*}{(a+x^*)^2} + \frac{\beta x^* z^*}{(b+x^*)^2}$$

dan

$$\frac{\alpha amx^*}{v(a+x^*)^3} + \frac{\beta bnx^*}{\omega(b+x^*)^3} + 2ux^{*2} + \frac{rx^*}{K} > \frac{\alpha x^* y^*}{(a+x^*)^2} + \frac{\beta x^* z^*}{(b+x^*)^2}$$

dimana $a_1 a_2 > a_3$.

Teorema 5. Titik setimbang interior $P^*(x^*, y^*, z^*)$ adalah stabil asimtotik global jika $\frac{r}{K} + u(x+x^*) > \frac{\alpha y^*}{(a+x)(a+x^*)} + \frac{\beta z^*}{(b+x)(b+x^*)}$ dan $v > \frac{mx^*}{(a+x)(a+x^*)}$, $\omega > \frac{nx^*}{(b+x)(b+x^*)}$ atau $v < \frac{mx^*}{(a+x)(a+x^*)}$, $\omega < \frac{nx^*}{(b+x)(b+x^*)}$.

Untuk mengecek apakah $P^*(x^*, y^*, z^*)$ stabil asimtotik global adalah dengan mendefinisikan fungsi Lyapunov, yaitu [3]:

$$V^*(x, y, z) = \int_{x^*}^x \frac{e - x^*}{e} dx + p^* \int_{y^*}^y df + q^* \int_{z^*}^z dg$$

dengan p^* dan q^* adalah konstanta dimana $p^* = \frac{\alpha}{m}$, $q^* = \frac{\beta}{n}$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{dV^*}{dt} &= \frac{(x - x^*)}{x} \frac{dx}{dt} + p \frac{(y - y^*)}{y} \frac{dy}{dt} + q \frac{(z - z^*)}{z} \frac{dz}{dt} \\
\frac{dV^*}{dt} &= (x - x^*) \left[\frac{r}{k} (x - x^*) - \alpha \left(\frac{y}{a+x} - \frac{y^*}{a+x^*} \right) - \beta \left(\frac{z}{b+x} - \frac{z^*}{b+x^*} \right) - u(x^2 - x^{*2}) \right] + \\
&\quad py \left[\frac{mx}{a+x} - \frac{mx^*}{a+x^*} - v(y - y^*) \right] + \\
&\quad q(z - z^*) \left[\frac{nx}{b+x} - \frac{nx^*}{b+x^*} - \omega(z - z^*) \right] \\
\frac{dV^*}{dt} &= (x - x^*)^2 \left[-\frac{r}{K} - u(x + x^*) + \frac{\alpha y^*}{(a+x)(a+x^*)} + \frac{\beta z^*}{(b+x)(b+x^*)} \right] + \\
&\quad (y - y^*)^2 \left(\frac{\alpha y^*}{(a+x)(a+x^*)} - \frac{\alpha v}{am} \right) + \\
&\quad (z - z^*)^2 \left(\frac{\beta z^*}{(b+x)(b+x^*)} - \frac{\beta \omega}{bn} \right) \\
&= -X^{*T} A^* X^*
\end{aligned}$$

dimana $X^{*T} = [x - x^*, y - y^*, z - z^*]$ dan $A^* = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

dimana:

$$\begin{aligned}
i &= \frac{r}{K} + u(x + x^*) - \frac{\alpha y^*}{(a+x)(a+x^*)} - \frac{\beta z^*}{(b+x)(b+x^*)} \\
j &= -\frac{\alpha y^*}{(a+x)(a+x^*)} + \frac{\alpha v}{am} \\
k &= -\frac{\beta z^*}{(b+x)(b+x^*)} + \frac{\beta \omega}{bn}
\end{aligned}$$

Sistem merupakan stabil asimtotik global pada $P^*(x^*, y^*, z^*)$ jika

$\frac{dV^*}{dt} < 0$ yaitu jika A^* definit positif. Sehingga, A^* definit positif

jika $\frac{r}{K} + u(x + x^*) > \frac{\alpha y^*}{(a+x)(a+x^*)} + \frac{\beta z^*}{(b+x)(b+x^*)}$ dan $v > \frac{mx^*}{(a+x)(a+x^*)}, \omega > \frac{nx^*}{(b+x)(b+x^*)}$ atau $v < \frac{mx^*}{(a+x)(a+x^*)}, \omega < \frac{nx^*}{(b+x)(b+x^*)}$.

4.6 Simulasi

Simulasi dibuat dengan menggunakan *software* MATLAB. Model sistem dinamis pada (4.4)-(4.6) adalah model deterministik, karena input yang diberikan tidak random, melainkan konstanta. Diketahui parameter dan nilainya sebagai berikut [3]:

Tabel 1. Parameter dan Nilai dengan nilai $u = v = \omega = 0.3$

Parameter	Nilai
r	1.5
K	100
α	0.6
β	0.8
d_1	0.001
d_2	0.002
a	2
b	2
m	0.4
n	0.6
q_1	0.2
q_2	0.3
q_3	0.4
E	0.5

Langkah-langkah yang harus dilakukan dalam simulasi dengan menggunakan *software* MATLAB adalah sebagai berikut:

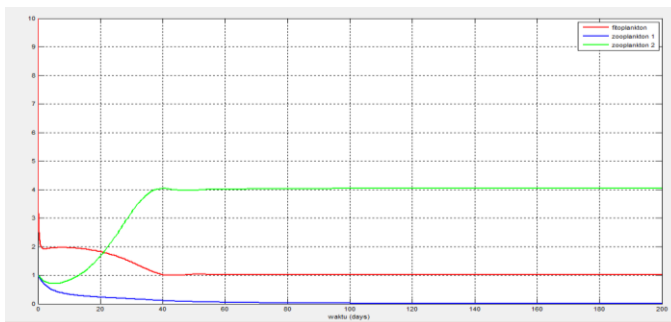
1. Menentukan nilai parameter sesuai syarat yang sudah diberikan
2. Memasukkan nilai parameter pada titik setimbang yang diperoleh untuk dicek apakah titik setimbang tersebut stabil atau tidak

3. Dari kestabilan titik setimbang yang diperoleh, akan dicek kestabilan global pada sistem, dengan memasukkan nilai parameter pada teorema untuk mengecek apakah sistem stabil asimtotik global atau tidak
4. Menginterpretasikan hasil analisis simulasi pada sistem

4.7 Analisis Hasil Simulasi

Dengan menggunakan *software* MATLAB didapatkan hasil simulasi model dari sistem dinamik satu fitoplankton dua zooplankton yang dipengaruhi racun.

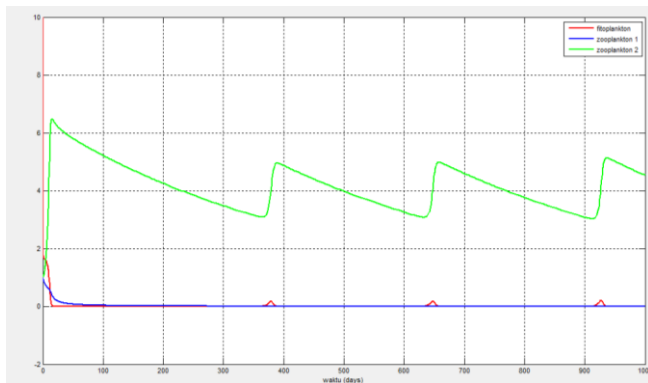
Simulasi pertama yang dilakukan adalah dengan mensimulasikan sistem satu fitoplankton dua zooplankton yang dipengaruhi oleh racun dengan usaha pemanenan, dengan memasukkan nilai parameter pada koefisien racun $u = v = \omega = 0.3$ maka akan didapat hasil seperti berikut, dimana x adalah populasi fitoplankton, y adalah populasi zooplankton I, dan z adalah populasi zooplankton II.



**Gambar 4.1. Simulasi Sistem Dinamik dengan nilai
 $u = v = \omega = 0.3$**

Pada Gambar 4.1, dengan memasukkan nilai koefisien racun pada ketiga populasi tersebut dengan $u = v = \omega = 0.3$ menunjukkan dalam waktu 40 hari sebelum adanya populasi zooplankton, populasi fitoplankton menurun, dan menjadi stabil pada hari ke-55. Kemudian setelah adanya populasi zooplankton, maka populasi zooplankton I menurun dalam waktu 100 hari sampai mendekati nol (stabil). Sedangkan untuk populasi zooplankton II meningkat dalam waktu 40 hari dan menjadi stabil pada hari ke-95.

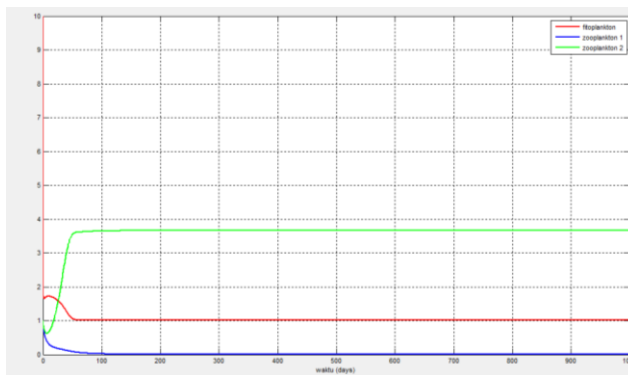
Simulasi kedua yang dilakukan adalah dengan mensimulasikan sistem satu fitoplankton dua zooplankton yang dipengaruhi oleh racun, dengan memasukkan nilai parameter pada koefisien racun $u = 0.4$, $v = \omega = 0.3$ dan tanpa pemanenan $E = 0$ maka didapat hasil seperti berikut:



Gambar 4.2. Simulasi Sistem Dinamik dengan
 $u = 0.4$, $v = \omega = 0.3$

Pada Gambar 4.2, dengan memasukkan nilai koefisien racun pada ketiga populasi tersebut dengan $u = 0.4$, $v = \omega = 0.3$ dan tanpa pemanenan $E = 0$ menunjukkan populasi fitoplankton menurun, dan pada hari ke-15 populasi menjadi punah. Kemudian untuk populasi zooplankton, populasi zooplankton I menurun dalam waktu 65 hari sampai mendekati nol (stabil) sehingga zooplankton I juga mengalami kepunahan. Sedangkan untuk populasi zooplankton II meningkat pada hari ke-17 lalu di hari-hari berikutnya menurun dan akhirnya menjadi punah juga, karena tidak ada faktor pemanenan.

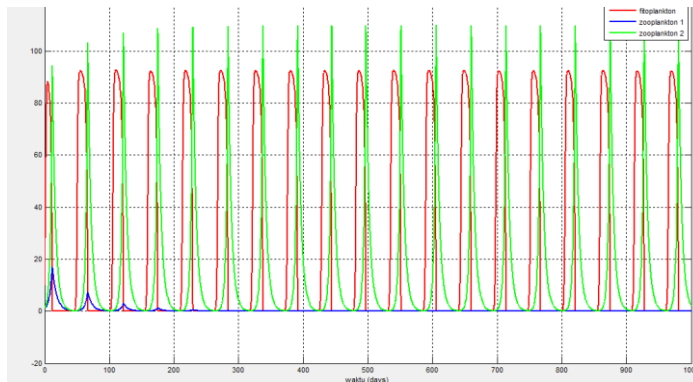
Simulasi ketiga yang dilakukan adalah dengan mensimulasikan sistem satu fitoplankton dua zooplankton yang dipengaruhi oleh racun dengan usaha pemanenan, dengan memasukkan nilai parameter pada koefisien racun $u = 0.4$, $v = \omega = 0.3$ maka akan didapat hasil seperti berikut:



Gambar 4.3. Simulasi Sistem Dinamik dengan
 $u = 0.4, \quad v = \omega = 0.3$

Pada Gambar 4.3, dengan memasukkan nilai koefisien racun pada ketiga populasi tersebut dengan $u = 0.4$, $v = \omega = 0.3$ dan pemanenan $E = 0.5$ menunjukkan populasi fitoplankton menurun, dan pada hari ke-50 populasi menjadi stabil. Kemudian untuk populasi zooplankton, populasi zooplankton I menurun dalam waktu 102 hari sampai mendekati nol (stabil) sehingga zooplankton I mengalami kepunahan. Sedangkan untuk populasi zooplankton II meningkat dan stabil pada hari ke-130.

Simulasi keempat yang dilakukan adalah dengan mensimulasikan sistem satu fitoplankton dua zooplankton yang dipengaruhi oleh racun dengan usaha pemanenan, dengan memasukkan nilai parameter pada koefisien racun $u = v = \omega = 0$ maka akan didapat hasil seperti berikut:



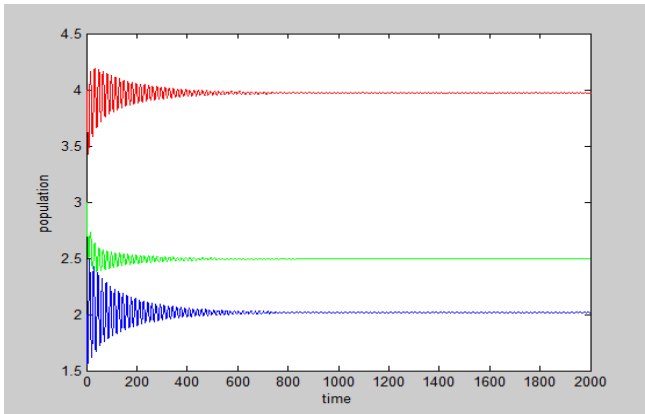
Gambar 4.4. Simulasi Sistem Dinamik dengan

$$u = v = \omega = 0$$

Pada Gambar 4.4, dengan tanpa memasukkan nilai koefisien racun pada ketiga populasi tersebut sehingga $u = v = \omega = 0$ dan pemanenan $E = 0.5$ menunjukkan populasi fitoplankton dan zooplankton II menjadi tidak stabil, sedangkan

untuk populasi zooplankton I menurun dalam waktu 240 hari sampai mendekati nol (stabil) sehingga zooplankton I mengalami kepunahan.

Simulasi kelima yang dilakukan adalah dengan mensimulasikan sistem satu fitoplankton dua zooplankton yang dipengaruhi oleh racun dengan usaha pemanenan, dengan memasukkan nilai parameter pada koefisien racun $u = 0.057$, $v = 0.02$, $\omega = 0.025$ dan $\alpha = 0.5589$ dan $\beta = 0.8$ maka akan didapat hasil seperti berikut:



**Gambar 4.5. Simulasi Sistem Dinamik dengan
 $u = 0.057, v = 0.02, \omega = 0.025$**

Pada Gambar 4.5, dengan meminimumkan nilai koefisien racun pada ketiga populasi tersebut dan pemanenan $E = 0.5$ dan merubah nilai pada $\alpha = 0.5589$ menunjukkan populasi fitoplankton, zooplankton I dan zooplankton II menjadi stabil pada waktu tertentu dan tidak ada yang mengalami kepunahan, sehingga ketiga populasi tersebut dapat terjaga kelestariannya (*survive*).

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, akan diberikan kesimpulan dari hasil yang telah didapatkan setelah melakukan analisis mengenai stabilitas lokal dan global serta analisis simulasinya. Selain itu, memberikan saran pada pembahasan yang telah dilakukan untuk dikaji lebih mendalam.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan keseluruhan hasil analisa yang telah dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir ini, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Pada analisis stabilitas lokal dapat diketahui bahwa model dari sistem satu fitoplankton dua zooplankton yang dipengaruhi oleh racun memiliki empat titik kesetimbangan yaitu pada:
 1. Titik setimbang yang bebas dari zooplankton $P'(x', 0, 0)$ adalah stabil asimtotik global
 2. Titik setimbang yang bebas dari zooplankton II $P_1(x_1, y_1, 0)$ adalah stabil asimtotik global jika $\frac{r}{K} + u(x + x_1) > \frac{\alpha y_1}{(a+x)(a+x_1)}$ dan $v > \frac{mx_1}{(a+x)(a+x_1)}$
 3. Titik setimbang yang bebas dari zooplankton I $P_2(x_2, 0, z_2)$ adalah stabil asimtotik global jika $\frac{r}{K} + u(x + x_1) > \frac{\alpha y_1}{(a+x)(a+x_1)}$ dan $\omega > \frac{nx_2}{(b+x)(b+x_2)}$
 4. Titik setimbang interior $P^*(x^*, y^*, z^*)$ adalah stabil asimtotik global jika $\frac{r}{K} + u(x + x^*) > \frac{\alpha y^*}{(a+x)(a+x^*)} + \frac{\beta z^*}{(b+x)(b+x^*)}$ dan $v > \frac{mx^*}{(a+x)(a+x^*)}, \omega > \frac{nx^*}{(b+x)(b+x^*)}$ atau $v < \frac{mx^*}{(a+x)(a+x^*)}, \omega < \frac{nx^*}{(b+x)(b+x^*)}$

Berdasarkan hasil analisis tersebut, dari empat titik setimbang yang diperoleh, semuanya bersifat stabil asimtotis global jika memenuhi syarat yang diberikan. Dan titik setimbang interior $P^*(x^*, y^*, z^*)$ yang menyebabkan ketiga populasi dapat *survive* (terjaga kelestariannya).

2. Dari hasil simulasi didapatkan bahwa sistem dinamis ini bergantung pada pemanenan dan racun. Jika tidak ada panen ($E = 0$) maka populasi zooplankton II menjadi tidak stabil sedangkan populasi fitoplankton dan zooplankton I berakibat punah. Jika terdapat panen dengan $E = 0.5$ maka bergantung pula di koefisien racunnya dimana koefisien racun pada *predator* (zooplankton I dan II) tidak melebihi koefisien racun pada *prey* (fitoplankton). Dengan meminimumkan koefisien racun pada ketiga populasi tersebut dengan nilai koefisien yang berbeda, dan nilai $\alpha = 0.5589$ maka ketiga populasi stabil dan terjaga kelestariannya.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini tidak dibahas mengenai kendali optimal untuk dapat mengetahui bagaimana pengaruh racun pada populasi satu fitoplankton dua zooplankton, untuk selanjutnya bisa dilakukan penyelesaian kendali optimal terhadap pengaruh racun pada populasi satu fitoplankton dua zooplankton baik dengan metode numerik maupun analitis.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Jordan. D.W. and Smith. P., 2007, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, New York: Oxford University Press.
- [2] R. Arditi, L. R. Ginzburg, "Coupling in Predator-Prey Dynamics : Ratio-Dependence", *J. Theor. Biol.* 139 (1989) 311-326.
- [3] K. Chakraborty, K. Das, "Modelling and Analysis of a Two-Zooplankton One-Phytoplankton System in the Presence of Toxicity", *Appl. Math. Model.*, 39 (2015) 1241-1265.
- [4] T. Das, R. N. Mukherjee, K. S. Chaudhuri, "Harvesting of a Prey-Predator Fishery in the Presence of Toxicity", *Appl. Math. Model.* 33 (2009) 2282-2922.
- [5] Y. Pei, Y. Lv, C. Li, "Evolutionary Consequences of Harvesting for a Two-Zooplankton One-Phytoplankton System", *Appl. Math. Model.* 36 (2012) 1752-1765.
- [6] T. Saha, M. Bandopadhyaya, "Dynamical Analysis of Toxin Producing Phytoplankton-Zooplankton Interactions", *Nonlinear Anal.: Real World Appl.* 10 (2009) 314-332.
- [7] Anonim. 2014. "Phytoplankton sebagai Parameter Kualitas Air" (http://riska-purwandani-fpk14.web.unair.ac.id/artikel_detail-116591-Phytoplankton-Phytoplankton%20sebagai%20Parameter%20Kualitas%20Air.html). Diakses pada tanggal 11 Juli 2015 pukul 09.33 WIB.
- [8] Alvendar, J., Baqi, A. I. 2012. "Model Pemanenan Logistik dengan Daya Dukung Bergantung Waktu". *Jurnal Matematika UNAND*, No 2. Vol 1. Hal 60-65.
- [9] Anisya, A. F. 2013. "Analisa Kestabilan dan Kendali Optimal pada Model Pemanenan Fitoplankton-Zooplankton". Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [10] Resmi, Fitroh. 2014. "Kendali Optimal pada Sistem Prey-Predator dengan Pemberian Makanan Alternatif pada Predator". Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS Surabaya.

LAMPIRAN

Berikut adalah lampiran source code dari M-File pada MATLAB:

- Dengan menggunakan GUI pada MATLAB

```
function varargout = Persamaan(varargin)
% PERSAMAAN MATLAB code for Persamaan.fig
%     PERSAMAAN, by itself, creates a new
PERSAMAAN or raises the existing
%     singleton*.
%
%     H = PERSAMAAN returns the handle to a
new PERSAMAAN or the handle to
%     the existing singleton*.
%
%
PERSAMAAN('CALLBACK',hObject,eventData,handl
es,...) calls the local
%     function named CALLBACK in
PERSAMAAN.M with the given input arguments.
%
%     PERSAMAAN('Property','Value',...)
creates a new PERSAMAAN or raises the
%     existing singleton*. Starting from
the left, property value pairs are
%     applied to the GUI before
Persamaan_OpeningFcn gets called. An
%     unrecognized property name or invalid
value makes property application
%     stop. All inputs are passed to
Persamaan_OpeningFcn via varargin.
%
%     *See GUI Options on GUIDE's Tools
menu. Choose "GUI allows only one
```

```

%         instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES
% Edit the above text to modify the response
to help Persamaan
% Last Modified by GUIDE v2.5 17-May-2015
14:43:33

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',
mfilename, ...
'gui_Singleton', gui_Singleton, ...
'gui_OpeningFcn', @Persamaan_OpeningFcn, ...
'gui_OutputFcn', @Persamaan_OutputFcn, ...
'gui_LayoutFcn', [] , ...
'gui_Callback', []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback =
str2func(varargin{1});
end

if nargin
    [varargout{1:nargout}] =
gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT
% --- Executes just before Persamaan is made
visible.
function Persamaan_OpeningFcn(hObject,
eventdata, handles, varargin)
% This function has no output args, see
OutputFcn.
% hObject    handle to figure

```

```

% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles structure with handles and user
data (see GUIDATA)
% varargin command line arguments to
Persamaan (see VARARGIN)

% Choose default command line output for
Persamaan
handles.output = hObject;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes Persamaan wait for user
response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);

% --- Outputs from this function are
returned to the command line.
function varargout =
Persamaan_OutputFcn(hObject, eventdata,
handles)
% varargout cell array for returning output
args (see VARARGOUT);
% hObject handle to figure
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles structure with handles and user
data (see GUIDATA)
% Get default command line output from
handles structure
varargout{1} = handles.output;

function r_Callback(hObject, eventdata,
handles)

```



```

% hObject      handle to r (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles       structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of r as text
%           str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of r as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function r_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to r (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles       empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%           See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function k_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to k (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB

```

```

% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of k as text
%      str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of k as a double
% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function k_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to k (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%      See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function alpa_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to alpa (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of alpa as text

```

```

%          str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of alpa as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function alpa_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to alpa (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%          See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function a_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to a (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of a as text
%          str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of a as a double

```

```
% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
```

```
function a_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to a (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%           See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
```

```
function beta_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to beta (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)
```

```
% Hints: get(hObject, 'String') returns
contents of beta as text
%           str2double(get(hObject, 'String'))
returns contents of beta as a double
```

```
% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
```

```
function beta_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to beta (see GCBO)
```

```

% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles empty - handles not created
until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function b_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject handle to b (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of b as text
% str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of b as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function b_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject handle to b (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles empty - handles not created
until after all CreateFcns called

```

```

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function u_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to u (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of u as text
%       str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of u as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function u_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to u (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.

```

```

if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function q1_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to q1 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of q1 as text
%           str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of q1 as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function q1_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to q1 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%           See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');

```

```
end
```

```
function m_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to m (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user
data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of m as text
%          str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of m as a double
```

```
% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
```

```
function m_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to m (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called
```

```
% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
```

```
%          See ISPC and COMPUTER.
```

```
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function v_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to v (see GCBO)
```



```

% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of v as text
% str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of v as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function v_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject handle to v (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles empty - handles not created
until after all CreateFcns called
% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function d1_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject handle to d1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles structure with handles and user
data (see GUIDATA)

```

```

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of d1 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of d1 as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function d1_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to d1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function q2_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to q2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of q2 as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of q2 as a double

```

```

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function q2_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to q2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function n_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to n (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of n as text
%         str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of n as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.

```

```

function n_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to n (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%           See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end

function omega_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to omega (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject, 'String') returns
contents of omega as text
%           str2double(get(hObject, 'String'))
returns contents of omega as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function omega_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to omega (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB

```

```

% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%           See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function d2_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to d2 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of d2 as text
%           str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of d2 as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function d2_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to d2 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

```

```

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function q3_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to q3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of q3 as text
%       str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of q3 as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function q3_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject    handle to q3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles     empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.

```

```

if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on button press in Grafik.
function Grafik_Callback(hObject, eventdata,
handles)
myform=guidata(gcbo);
x0=10;
y0=1;
z0=1;
r=str2double(get(myform.r,'string'));
k=str2double(get(myform.k,'string'));
alpa=str2double(get(myform.alpa,'string'));
a=str2double(get(myform.a,'string'));
beta=str2double(get(myform.beta,'string'));
b=str2double(get(myform.b,'string'));
u=str2double(get(myform.u,'string'));
q1=str2double(get(myform.q1,'string'));
m=str2double(get(myform.m,'string'));
v=str2double(get(myform.v,'string'));
d1=str2double(get(myform.d1,'string'));
q2=str2double(get(myform.q2,'string'));
n=str2double(get(myform.n,'string'));
E=str2double(get(myform.E,'string'));
omega=str2double(get(myform.omega,'string'))
;
d2=str2double(get(myform.d2,'string'));
q3=str2double(get(myform.q3,'string'));
panjang=str2double(get(myform.panjang,'string'));
pilih1=get(myform.pilihan1,'value');

```

```

[t,xsol]=ode45('dyna',[panjang
1000],[x0,y0,z0]);

set(myform.figure1,'CurrentAxes',myform.axes
1);
set(myform.axes1,'xgrid','on','ygrid','on','
fontsize',8);
[T,T]=meshgrid(0:100:500,0:100:500);
Z1=xsol(:,1);
Z2=xsol(:,2);
Z3=xsol(:,3);
for i=1:30
    Z1=[Z1 xsol(:,1)];
    Z2=[Z2 xsol(:,2)];
    Z3=[Z3 xsol(:,3)];
    %    Z4=[Z3 xsol(:,4)];
end
Zst=Z1;
Zqt=Z2;
Zxt=Z3;
% ZLamda=Z4;
switch pilih1
case 1
    plot(xsol(:,2),xsol(:,1),'-
r','LineWidth',2)

set(myform.axes1,'xgrid','on','ygrid','on','
fontsize',8);
    xlabel('Fitoplankton');
    ylabel('Zooplankton I');
    legend('Fitoplankton')

case 2
    plot(xsol(:,3),xsol(:,2),'-
b','LineWidth',2)
set(myform.axes1,'xgrid','on','ygrid','on','
fontsize',8);

```



```

        xlabel('waktu (days)');
        ylabel('zooplankton 1');
        legend('Zooplankton 1')
case 3
        plot(t,xsol(:,3),'-
g','LineWidth',2)

set(myform.axes1,'xgrid','on','ygrid','on','
fontsize',8);
        xlabel('waktu (days)');
        ylabel('zooplankton 2');
        legend('Zooplankton 2')
case 4
        plot(t,xsol(:,1),'-
r',t,xsol(:,2),'-b','LineWidth',2)

set(myform.axes1,'xgrid','on','ygrid','on','
fontsize',8);
        xlabel('waktu (days)');

legend('fitoplankton','zooplankton 1')
case 5
        plot(t,xsol(:,1),'-
r',t,xsol(:,3),'-g','LineWidth',2)

set(myform.axes1,'xgrid','on','ygrid','on','
fontsize',8);
        xlabel('waktu (days)');

legend('fitoplankton','zooplankton 2')
case 6
        plot(t,xsol(:,1),'-
r',t,xsol(:,2),'-b',t,xsol(:,3),'-
g','LineWidth',2)
set(myform.axes1,'xgrid','on','ygrid','on','
fontsize',8);

```

```

        xlabel('waktu (days)');

legend('fitoplankton','zooplankton
1','zooplankton 2')
end

% --- Executes on selection change in
pilihan1.
function pilihan1_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to pilihan1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: contents =
cellstr(get(hObject,'String')) returns
pilihan1 contents as cell array
%          contents{get(hObject,'Value')}
returns selected item from pilihan1

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function pilihan1_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% hObject    handle to pilihan1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: popupmenu controls usually have a
white background on Windows.
%          See ISPC and COMPUTER.

```

```

if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function E_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to E (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user
data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of E as text
%           str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of E as a double

% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function E_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% hObject      handle to E (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%           See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');

```

end

```
function panjang_Callback(hObject,
 eventdata, handles)
% hObject    handle to panjang (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user
data (see GUIDATA)
% Hints: get(hObject,'String') returns
contents of panjang as text
%          str2double(get(hObject,'String'))
returns contents of panjang as a double
% --- Executes during object creation, after
setting all properties.
function panjang_CreateFcn(hObject,
 eventdata, handles)
% hObject    handle to panjang (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a
future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white
background on Windows.
%          See ISPC and COMPUTER.
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

- Dengan Menggunakan ODE45 pada MATLAB

```
clear all;
clc;
close all;
options = odeset('RelTol',1e-
4,'AbsTol',[1e-9 1e-9 1e-9]);
[t,x] = ode45(@rigid,[0 2000],[2 3 4],
options);

plot(t,x(:,1),'b',t,x(:,2),'g',t,x(:,3),
'r','LineWidth',0.0000001);
% plot(x(:,3),x(:,2),'b','LineWidth',2);
xlabel('time');
ylabel('population');
% legend('Fitoplankton','Zooplankton
I','Zooplankton
II','location','eastoutside');
% legend('x terhadap
t','location','eastoutside');
% legend('y terhadap
t','location','eastoutside');
% legend('v terhadap
t','location','eastoutside');
% grid on

function dx = rigid(t,x)
    r=1.5;
    k=100;
    alpha=0.6;
    beta=0.8;
```

```

a=2;
b=2;
E=0;
u=0.057;
v=0.02;
omega=0.025;
m=0.4;
n=0.6;
d_1=0.001;
d_2=0.002;
q_1=0.2;
q_2=0.3;
q_3=0.4;

dx = zeros(3,1);

dx(1)= r*x(1)*(1-(x(1)/k))-
(alpha*x(1)*x(2)/(a+x(1)))-
beta*x(1)*x(3)/(b+x(1))-u*(x(1)^3)-
q_1*E*x(1);

dx(2)= m*x(1)*x(2)/(a+x(1))-
v*x(2)^2-d_1*x(2)-q_2*E*x(2);

dx(3)= n*x(1)*x(3)/(b+x(1))-
omega*x(3)^2-d_2*x(3)-q_3*E*x(3);

end

```

BIODATA PENULIS



Dyna Tsuroyya atau yang biasa dipanggil dyntsu lahir di Surabaya, 19 September 1993. Penulis bertempat tinggal di Jalan Semolowaru 110, Surabaya. Anak ke-5 pasangan Choiruddin dan Sri Supinawati ini memiliki kegemaran *reading*, *shopping*, dan *travelling*. Pendidikan di bangku sekolah mulai dari SD (Sekolah Dasar) sampai S-1 berada di kota Surabaya. Alumni SD Islam Raden Patah Surabaya, SMP Negeri 19 Surabaya, dan SMA Negeri 5 Surabaya ini melanjutkan pendidikannya pada tahun 2011 di Jurusan Matematika ITS melalui jalur SNMPTN untuk menempuh pendidikan S-1 selama 4 tahun. Selama kuliah, penulis aktif di beberapa organisasi mahasiswa, seperti BEM ITS (Badan Eksekutif Mahasiswa ITS), JMMI ITS (Jamaah Masjid Manarul Ilmi ITS), HIMATIKA ITS (Himpunan Mahasiswa Matematika ITS) dan IBNU MUQLAH (Lembaga Dakwah Jurusan Matematika ITS). Serta aktif dalam kepanitiaan, yaitu pernah menjadi tim inti BPDF ITS (Badan Penyelidik Dana Kampanye ITS), kepanitiaan ITS EXPO, pernah menjadi SC (*Steering Committee*) pada acara GMAIL ITS (Gebyar Manarul Ilmi ITS) dan GIM ITS (Gebyar Ibnu Muqlah) pada tahun 2013. Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai Tugas Akhir, silahkan menghubungi email dynatsu@gmail.com. Semoga bermanfaat.